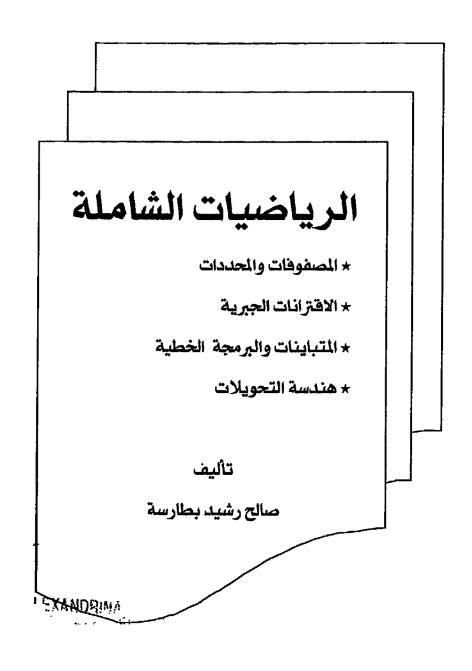
الرياضيات الشاملة

المصفوفات - الاقترانات الجبرية

هندسة التحويلات - المتباينات والبرمجة الخطية

صالح رشيد بطارسة

دار أسامة



دار أسامة للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

الناشر

دار أسامة للنشر و التوزيع

الأردن – عمان

- **هاتف :** 5658252 – 5658253
- **فاكس :** 5658254
- **العنوان : العبدلي- مقابل البنك العربي**

ص. ب : 141781

Email: darosama@orange.jo

www.darosama.net

الطبعة الأولى

2014م

رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية

(2013/6/2214)

510

بطارسة، صالح رشيد

الرياضيات الشاملة/صالح رشيد بطارسة.- عمان: دار أسامة للنشر والتوزيع ، 2013.

( ) ص.

ر.أ :(2013/6/2214).

الواصفات: الرياضيات/

ISBN: 978-9957-22-385-4

الفهرس

المقدمة

بعد الاتكال على الله، ، ،

قمت بتأليف وإعداد هذه السلسلة من الرياضيات تحت عنوان "الرياضيات الشاملة". بمضمون كامل وعلم وافر وأسلوب نادر، نعم إنه أسلوب علمي بسيط يخلو من الحشو والغموض والتعقيد، كونه يعتمد على الاكثار من الأمثلة والتمارين لتوضيح المصطلحات والمفاهيم دون تكرار منفّر للدارسات والدارسين وبلا إيجاز مُدَّمر للنظريات والقوانين.

من المعلوم أن الرياضيات قديمة قدم الزمان وهبها الله للإنسان منذ أن خلق أبانا آدم وأمنا حواء. ولكن الآن ما عادت الرياضيات كما كانت عليه من أزمان مجرد مجموعة من الرموز والاشارات والأعداد..

ومع أنها كذلك إلاّ أنها أصبحت بالإضافة الى ذلك ضرورة من ضرورات الحياة كالهواء والماء والغذاء.. التي يحتاجها الانسان للقضاء على الجهل والفقر والمرض... تلك الآفات التي لا تتعايش إلا مع من تخلّف من البشر.،

لذا لا بُدَّ من القول إن:

الرياضيات جسرٌ للعبور الى عصر التكنولوجيا والعلوم الزاخر بالاختراعات والابتكارات والفنون، والتي نحن بحاجة ماسة اليها جميعاً لتسيير عجلة الحياة بكل يُسر وبلا معاناة.

الرياضيات إن كنت لا تعلم هي بالذات معشوقة الجماهير المحبة للعلم، والقادرة على التفكير، ولكن لا يجرؤ على عشقها من البشر إلا من كان قوي الإرادة سريع البديهة سليم العقل والجسم معاً. وصدق من قال في هذا المضمار "العقل السليم في الجسم السليم". وأصدق منه من يقول: "الرأس بلا تفكير كالإناء المشروخ، كلاهما يستحق التكسير".

- الرياضيات إن كنت لا تدري تُنمي الذكاء وتُشذّب الأخلاق وتسمو بالإنسان الى العلاء، كيف لا؟ وجميع رواد الفضاء من العلماء والرياضيين (علماء الرياضيات).

- الرياضيات لا تحتاج من دارسها الكثير من الجهد والعناء، بل يجب عليه الإلمام البسيط بالقوانين والنظريات، ولكن ليس كالببغاوات بالحفظ دون الفهم! وإنما تحتاج الى التدريب الكتابي الكافي، وباستمرار مع الدقة والإتقان والسرعة قدر الإمكان.

- فيادارس الرياضيات عليك استخدام "الورقة والقلم" أفضل وسيلة لدراسة العلوم قاطبة،،، لتصبح بعد مدة من الزمن من علماء الرياضيات البارزين.. ونؤكد ونختم على ذلك بقولنا آمين!...

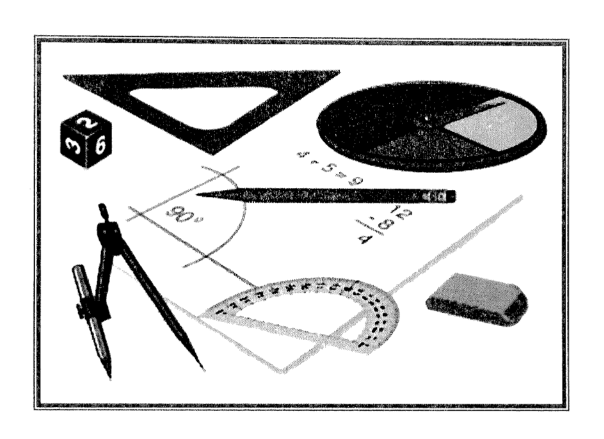
المؤلف

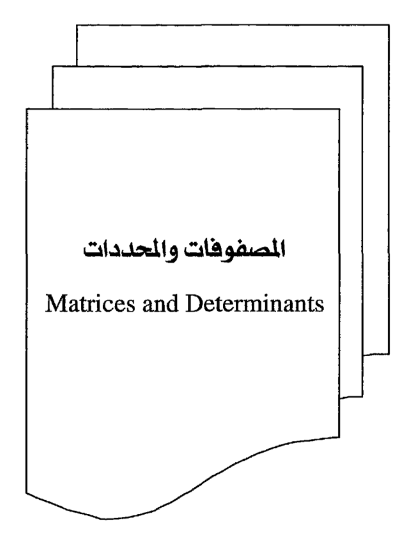
تنويه

في هذا السياق لا بد لي من أن أنبه الى هذه الملحوظة منذ البداية فأقول:

بما أننا نعيش عصر العلم والتكنولوجيا، وجب علينا استخدام الحواسيب والآلات الحاسبة لتسهيل اجراء العمليات الرياضيات، واستخراج نتائجها بكل دقة واتقان، وبالسرعة التي يتصف بها هذا الزمان".

المؤلف


90°


المصفوفات والمحددات
Matrices and Determinants

(٧ - ١) المصفوفة Matrix

يعود الفضل في ابتكار المصفوفات الى العالم الياباني كووا (١٦٣٧-١٧٠٨ م) عام ١٦٨٣م وهو أول من طوّر المحددات المنبثقة عنها.

ولكن العالم البريطاني كايلي (١٧٧٣ - ١٨٥٧ م) هو أول من وضع أسس نظرية المصفوفات بطريقة منظمة وبالشكل الذي سنراه من خلال السطور التالية:

المصفوفة: كائن رياضي مكون من منظومة أعداد حقيقية مرئية على شكل صفوف وأعمدة، تسمى هذه الأعداد عناصر المصفوفة أو مدخلاتها، كما في المثال:

مثال:

في احدى المدارس الثانوية الشاملة كان عدد طلاب الصف الأول الثانوي العلمي ٢٥ طالباً

وعدد طلاب الصف الأول الثانوي الأدبي ٣٤ طالباً

وعدد طلاب الصف الأول الثانوي الصناعي ١٦ طالباً

وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي العلمي ١٩ طالباً

وعدد طلاب الصف الثاني الثانوي الأدبي ٤٣ طالباً

وعدد طلاب الصف الثاني الثوي الصناعي ١٨ طالباً

دوّن المعلومات السابقة على شكل مصفوفة.

سنرمز للمصفوفة بأحد الحروف الهجائية أسفله خط صغير هكذا $\underline{أ}$، $\underline{ب}$، $\underline{جـ}$ فالمصفوفة التي تمثل المعلومات السابقة عند وضع الفروع كأعمدة والفصول الدراسية كصفوف هي:

$$\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٣٤ & ١٦ \\ ١٩ & ٤٣ & ١٨ \end{pmatrix} \begin{matrix} \text{الصف الأول الثانوي} \\ \text{الصف الثاني الثانوي} \end{matrix}$$

فالأعداد ٢٥ ، ٣٤ ، ١٦ ، ١٩ ، ٤٣ ، ١٨ هي مدخلات المصفوفة أ عدد صفوفها اثنان، وعدد أعمدتها ثلاثة.

ويسمى الرمز: عدد الصفوف × عدد الأعمدة بـ رتبة المصفوفة.

ولكن دون اجراء عملية الضرب اطلاقاً، لأن الرتبة رمز وليست عملية ضرب. فالمصفوفة أ أعلاه من الرتبة ٢ × ٣ وتكتب هكذا $\frac{أ}{٢ \times ٣}$.

ويشكل عام المصفوفة $\frac{أ}{٢ \times ٣}$ هي المصفوفة التي عدد صفوفها = م صفاً وعدد أعمدتها = ن عاموداً ، تعمل م ، ن ∋ ط كأعداد طبيعية.

وتكتب مدخلات المصفوفة بشكل عام، يربط كل مدخلة فيها باسم المصفوفة التي هي عناصر فيها.

فالمصفوفة $\frac{أ}{٢ \times ٣} = \begin{pmatrix} أ_{١١} & أ_{٢١} & أ_{٣١} \\ أ_{١٢} & أ_{٢٢} & أ_{٣٢} \end{pmatrix}$

والمصفوفة $\frac{ب}{٢ \times ٣} = \begin{pmatrix} ب_{١١} & ب_{٢١} & ب_{٣١} \\ ب_{١٢} & ب_{٢٢} & ب_{٣٢} \end{pmatrix}$

وهكذا....

وعند تدوين المصفوفة أ مجردة من أي معلومات أخرى تظهر على الشكل:

$$\frac{أ}{٢ \times ٣} = \begin{pmatrix} ٢٥ & ٣٤ & ١٦ \\ ١٩ & ٤٣ & ١٨ \end{pmatrix}$$

(٧- ٢) أشكال المصفوفات وأنواعها Types of matrixes:

والمصفوفات على اشكال وأنواع متعددة، وترتبط بقيم م ، ن (عدد الصفوف وعدد الأعمدة) كما يلي:

(i) المصفوفة المستطيلة Rectangular matrix:

اذا كانت م ≠ ن مثل: $\frac{أ}{٣ \times ٢} = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ٥ & ٠ \\ \frac{١}{٢} & \frac{١}{٤} \end{pmatrix}$

(ii) **المصفوفة المربعة** Square matrix:

اذا كانت م = ن مثل:

$$\text{أ}_{٣ \times ٣} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١- & ٥ \\ \sqrt{٢} & \frac{١}{٢} & ٤ \end{pmatrix}$$

(iii) **مصفوفة الصف** Row matrix:

اذا كانت م = ١ مثل: $\text{أ}_{١ \times ٤} = \begin{bmatrix} ٣- & ٤ & ٥ & ١ \end{bmatrix}$

(iv) **مصفوفة العامود** Column matrix:

اذا كانت ن = ١ مثل $\text{أ}_{٢ \times ١} = \begin{bmatrix} ٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$

(v) **مصفوفة قطرية** Diagenal matrix:

حيث مدخلاتها التي لا تشكل قطراً فيها معدومة أي قيمة كل منها أصفار مثل:

$$\text{أ}_{٣ \times ٣} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ & ٣٥ \\ ٠ & ١٢ & ٠ \\ ٤- & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

(vi) **مصفوفة مثلثية:**

حيث نصف مدخلاتها معدومة ونصفها الآخر مع مدخلات القطر فلها مثل:

$$\text{أ}_{٣ \times ٣} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ١ \\ ٢- & ٥ & ٠ \\ \frac{١}{٢} & ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

(vii) **المصفوفة الصفرية** Zero matrix :

مدخلاتها أصفار ويرمز لها بالرمز هـ مثل:

$$\underset{2\times 2}{هـ} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(iix) **مصفوفة الوحدة** Unit matrix:

جميع مدخلاتها ما عدا القطر الرئيسي فيها اصفار (القطر الرئيسي هو النازل من اليمين باتجاه اليسار) ويرمز لها بالرمز و مثل:

$$\underset{2\times 2}{أ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

هذا وتتساوى المصفوفتان اذا تساوت رتباتهما، وكذلك اذا تساوت فيهما المدخلات المتناظرة، والمدخلات المتناظرة هي المدخلات أو العناصر التي تقع في نفس المكان داخل المصفوفتين المتساويتين.

فالمصفوفات المربعة تتساوى اذا تساوت فيهما المدخلات المتناظرة. أي اذا كان:

$$\underset{2\times 2}{أ} = \begin{pmatrix} أ_{11} & أ_{21} \\ أ_{12} & أ_{22} \end{pmatrix}$$

$$\underset{2\times 2}{ب\ أ} = \begin{pmatrix} ب_{11} & ب_{21} \\ ب_{12} & ب_{22} \end{pmatrix}$$

والمدخلات المتناظرة ترتب هكذا:

فإن $\underset{2\times 2}{أ} = \underset{2\times 2}{ب}$ عندما $أ_{11} = ب_{11}$ وتقرأ أ واحد واحد = ب واحد واحد

$أ_{21} = ب_{21}$ أ اثنين واحد = ب اثنين واحد

$أ_{12} = ب_{12}$ وهكذا...

$أ_{22} = ب_{22}$

وبشكل عام وبالرموز تتساوى المصفوفتان $أ_{م \times ن}$ ، $ب_{م \times ن}$

اذا كان $أ_{ي ر} = ب_{ي ر}$ حيث $أ \in {}_{م \times ن}$ ، $ب \in {}_{م \times ن}$

والمصفوفات المستطيلة التي من نفس الرتبة يمكن أن تتساوى اذا كانت مدخلاتها المتناظرة متساوي، واذا اختلفت الرتب لا يمكن أن تتساوى المصفوفات.

وبشكل مبسط للغاية نقول: $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ع & ل \\ م & ن \end{pmatrix}$

اذا وفقط اذا كان أ = ع ، ب = ل ، جـ = م ، د = ن

كون ذلك يترجم تساوي العناصر أو المدخلات المتناظرة في المصفوفتين المذكورتين.

مثال:

اذا كان:

$$\begin{pmatrix} س + ص & ٣ \\ س^٢ - ٢ص & -٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix}$$

أوجد قيمة كل من س ، ص .

بما أن المصفوفتين أعلاه متساويتان فإن المدخلات المتناظرة في المصفوفتين متساوية ولذلك:

$س + ص = ٧$ (١)

$س^٢ - ٢ص = ١$ (٢)

وهنا آلَ السؤال إلى نظام من المعادلات بمتغيرين.

والحل بالتعويض هكذا:

$س = ٧ - ص$ س موضوع القانون

∴ (٧ – ص)^{٢} - ٢ ص = ١ وبعد فك القوس والترتيب لحدود المعادلة:

٤٩ – ١٤ ص + ص^{٢} - ٢ ص – ١ = صفر

ص^{٢} – ١٦ ص + ٤٨ = صفر

(ص – ٤) (ص – ١٢) = صفر

ص = ٤ ، ١٢ قيم ص

لكن س = ٧ – ص = ٧ – ٤ = ٣

٧ – ١٢ = - ٥ قيم س

مثال:

ما نوع وشكل كل مصفوفة فيما يلي وما رتبتها؟:

(i) $\begin{pmatrix} ٩ & ٧ & ٢ \\ ٨ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ← مستطيلة من الرتبة ٢ × ٣ وتكتب $\underset{٢ \times ٣}{أ}$

(ii) $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ١ & ١ \end{pmatrix}$ ← مربعة من الرتبة ٢ × ٢ وتكتب $\underset{٢ \times ٢}{ب}$

(iii) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \end{pmatrix}$ ← مصفوفة الصف/ مستطيلة من الرتبة ١ × ٣ وتكتب $\underset{١ \times ٣}{جـ}$

(٧- ٣) جبر المصفوفات:

جبر المصفوفات معناه: كيفية اجراء العمليات التالية "جمع ، طرح ، قسمة" على المصفوفات، وهنا نركز أن المصفوفات التي نحن بصددها في هذا المستوى هي مصفوفات حقيقية أي مدخلاتها أعداد حقيقية.

ولنبدأ بعملية الجمع Addition:

الشرط الوحيد لجمع المصفوفات هو أن تكون من نفس الرتبة.

وأما ميكانيكية عملية الجمع فتتم كما يلي: تُجمع المدخلات المتناظرة في المصفوفات المراد جمعها كما يلي:

مثال:

أوجد ناتج جمع: $\begin{pmatrix} ٢ & -١ & ١ \\ -٥ & ٣ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{pmatrix}$

الجواب= $\begin{pmatrix} ٢+٣ & -١+٢ & ١+١ \\ -٥+٦ & ٣+٥ & ٠+٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ١ & ٢ \\ ١ & ٨ & ٤ \end{pmatrix}$

والملاحظ أن رتبة المصفوفة الناتجة عن جمع المصفوفات هي نفس رتبة كل من المصفوفين وبالرموز: $\underset{م \times ن}{أ} + \underset{م \times ن}{ب} = \underset{م \times ن}{جـ}$

حيث: $أ_{ي د} + ب_{ي د} = جـ_{ي د}$ لجميع قيم ي ، د

نظرية:

عملية جمع المصفوفات تبديلية وتجميعية، والدليل هذا المثال ومن شقين:

الشق الأول: $\begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٨ \end{pmatrix}$ الجمع مباشرة

وكذلك $\begin{pmatrix} -١ & ٠ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٢ \\ -٤ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٢ \\ -١ & ٤ \end{pmatrix}$ الحلان متساويان

الشق الثاني: $\left(\begin{pmatrix} ١ & ٥ \\ ٤ & -٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٠ & ٣ \\ ٠ & ٥ \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & -٢ \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} ١ & ٨ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ١ \\ -٢ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٩ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \longrightarrow (١)$

وكذلك: $\left(\begin{pmatrix}١ & ١\\ -٢ & -٢\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}٠ & ٣\\ ٠ & ٥\end{pmatrix}\right) + \begin{pmatrix}١ & ٥\\ ٤ & -٢\end{pmatrix}$

$(٢) \longleftarrow \begin{pmatrix}٢ & ٩\\ ٢ & ١\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ٤\\ -٢ & ٣\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}١ & ٥\\ ٤ & -٢\end{pmatrix} =$

الطرفان متساويان

وبشكل عام فإن:

أ + ب = ب + أ الجمع تبديلي Commutative

(أ + ب) + جـ = أ + (ب + جـ) الجمع تجمعي Associative

وبما أن $\underset{٣ \times ٢}{هـ} = \begin{pmatrix}٠ & ٠\\ ٠ & ٠\end{pmatrix}$ هي المصفوفة المحايدة Identity matrix

لعملية جمع المصفوفات فإنه ينتج أن لكل مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢ معكوساً جمعياً Inverse of marix وهي ما تسمى سالب المصفوفة Negetive matrix كما في المثال:

سالب المصفوفة $\begin{pmatrix}-٣ & ٥\\ ٠ & ٤\end{pmatrix}$ هي المصفوفة $\begin{pmatrix}٣ & -٥\\ ٠ & -٤\end{pmatrix}$

كون $\begin{pmatrix}-٣ & ٥\\ ٠ & ٤\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}٣ & -٥\\ ٠ & -٤\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٠ & ٠\\ ٠ & ٠\end{pmatrix} =$ هـ

ولذلك فعملية طرح المصفوفات تعرف كما يلي:

أ - ب = أ + (- ب) = هـ لغوياً المصفوفة أ + سالب المصفوفة ب =

هكذا:

$\begin{pmatrix}٤ & -١\\ -١ & -٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-١ & -٤\\ -٢ & ٠\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}٥ & ٣\\ ١ & -٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ٤\\ ٢ & ٠\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٥ & ٣\\ ١ & -٢\end{pmatrix}$

ويمكن أن تتم عملية الطرح مباشرة هكذا:

نفس الجواب السابق $\begin{pmatrix}٤ & -١\\ -١ & -٢\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}٥-١ & ٣-٤\\ ١-٢ & -٢-٠\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}١ & ٤\\ ٢ & ٠\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}٥ & ٣\\ ١ & -٢\end{pmatrix}$

والآن للتأكد من أن عملية طرح المصفوفات ليست تبديلية ولا تجميعية كما يلي:

$$\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

غير متساوبتين

و

$$\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -٤ & -٦ \\ -٣ & -٢ \end{pmatrix}$$

وكذلك

$$\left(\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}\right) - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٤ & -٦ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٨ \\ ٠ & -٢ \end{pmatrix} \rightarrow (١)$$

غير متساويتين

و

$$\begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} ١ & -٢ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} ٥ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٠ & -٤ \\ -٣ & -٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ & ٨ \\ ٦ & ٦ \end{pmatrix} \rightarrow (٢)$$

وبالرموز $\underline{أ}$ - $\underline{ب}$ ≠ $\underline{ب}$ - $\underline{أ}$ الطرح غير تبديلي

وكذلك $\underline{أ}$ - ($\underline{ب}$ - $\underline{جـ}$) ≠ ($\underline{أ}$ - $\underline{ب}$) - $\underline{جـ}$ الطرح غير تجميعي

❖ ضرب المصفوفات:

وعملية الضرب في المصفوفات البنتان:

الأولى: عملية ضرب عدد حقيقي في مصفوفة = عدد حقيقي × مصفوفة

أو أ × $\underline{أ}_{٢ \times ٢}$ حيث أ ∋ ح ، $\underline{أ}$ مصفوفة مربعة من الرتبة ٢ × ٢

وهذا الضرب يسمى أحياناً بالضرب القياسي Scalor multip lication

والمقصود هو ضرب أعداد حقيقية في مصفوفات (ليست من نوع واحد).

وعملية الضرب تتم بضرب كل مدخلة من مدخلات المصفوفة بالعدد الحقيقي هكذا:

مثال:

اذا كانت $\underset{٢\times٢}{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢- & ٠ \end{pmatrix}$ أوجد $\underset{٢\times٢}{أ}$ ، $- ٣ \underset{٢\times٢}{أ}$

$$أ \quad \underset{٢\times٢}{أ} = ٥ \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ - & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٣)\,٥ & (١)\,٥ \\ (٢\ -)\,٥ & (٠)\,٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٣ & ٥ \\ ١٠ - & ٠ \end{pmatrix}$$

$$\text{وكذلك} - ٣ \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ - & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٣)٣ - & (١)\,(٣\ -) \\ (٢\ -)\,٣ - & (٠)٣ - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩ - & ٣ - \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix}$$

والثانية: عملية ضرب مصفوفة في مصفوفة أخرى ولكن بشروط معينة تُثبت شرط ضرب المصفوفات بما يلي:

$$\underset{ى \times ر}{أ} \times \underset{ر \times ك}{ب} = \underset{ى \times ك}{جـ}$$

(ر ، ر) متساويان

وتفسير ذلك أنه لضرب مصفوفين لا يشترط تساوي الرتب فيهما وانما يجب أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى (عدد مدخلات العامود ر) = عدد صفوف المصفوفة الثانية (عدد مدخلات الصف ي) والمصفوفة الناتجة تكون من رتبة $\underset{ى \times ك}{جـ}$

كما في المثال:

اذا كانت $\underset{٣\times٢}{أ} = \begin{pmatrix} ٨ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\underset{٢\times٣}{ب} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٠ & ٩ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix}$

أوجد $\underset{٣\times٢}{أ}$ ، $\underset{٢\times٣}{ب}$ اذا أمكن ذلك

وكذلك $\underset{٢\times٣}{ب}$ ، $\underset{٣\times٢}{أ}$ اذا أمكن ذلك

$\underset{٢\times\boxed{٣}}{أ} \cdot \underset{\boxed{٣}\times ٢}{ب}$ = الضرب ممكن لتساوي الوسطين (عدد أعمدة الأول ٣

بـ عدد صفوفة الثاني ٣)

أي $\underset{٢\times\boxed{٣}}{أ} \cdot \underset{\boxed{٣}\times ٢}{ب} = \underset{٢\times ٢}{جـ}$

وأما كيفية اجراء عملية ضرب المصفوفات فتتم بالخطوات التالية وبإيجاز شديد:

$$\begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٠ & ٩ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix}$$

وتسهيلاً للحل نوزع صفوف المصفوفة الأولى وعلى شكل أعمدة هكذا:

$$\begin{pmatrix} ١٢\times ٨ + (٠\times ٥)\ (٨\times ٢) & (٠\times ٨) + (٩\times ٥) + (٦\times ٢) \\ ١٢\times ٤ \times (٠\times ١) + (٧\times ٣) & (١٠\times ٤) + (٦\times ١) + (٦\times ٣) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٠ & ٩ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix} =$$

$$(١) \longleftarrow \begin{pmatrix} ١١٠ & ١٣٧ \\ ٦٩ & ٦٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٩٦ + ٠ + ١٤ & ٨٠ + ٤٥ + ١٢ \\ ٤٨ + ٠ + ٢١ & ٤٠ + ٩ + ١٨ \end{pmatrix} =$$

وأما $\underset{٣\times\boxed{٢}}{أ} \cdot \underset{\boxed{٢}\times ٣}{ب} = \underset{٣\times ٣}{جـ}$

والضرب بإيجاز شديد

$$\begin{pmatrix} ٨ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦ \\ ٠ & ٩ \\ ١٢ & ١٠ \end{pmatrix}$$

وتسهيلاً للحل نوزع صفوف المصفوفة الأولى وعلى شكل أعمدة هكذا:

$$\begin{pmatrix} ٤\times ٧ + (٨\times ٦) & (١\times ٧) + (٥\times ٦) & (٣\times ٧) + (٢\times ٦) \\ ٤\times ٠ + (٨\times ٩) & (١\times ٠) + (٥\times ٩) & (٣\times ٠) + (٢\times ٩) \\ ٤\times ٤ + (٨\times ٨) & (٠\times ٤) + (٥\times ٨) & (٣\times ٤) + (٢\times ٨) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ & ٥ & ٢ \\ ٤ & ١ & ٣ \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} ٧٦ & ٣٧ & ٣٣ \\ ٧٢ & ٤٥ & ١٨ \\ ١٢٨ & ٦٢ & ٥٦ \end{pmatrix} \longrightarrow (٢)$$

ومن الملاحظ أن الجوابين ١ ، ٢ غير متساويين. لذا فالضرب غير تبديلي.

مُلخص مفيد وبإيجاز شديد:

الضرب ممكن عندما تتساوى عدد أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد صفوف الثانية هكذا:

$$\underset{ى\ ر}{\underline{أ}} \cdot \underset{ر\ ك}{\underline{ب}} = \underset{ى \times ك}{\underline{جـ}}$$ "الضرب ممكن"

والضرب غير ممكن عندما لا تتساوى عدد أعمدة المصفوفة الأولى مع عدد صفوف الثانية هكذا:

$$\underset{ر\ ك}{\underline{أ}} \cdot \underset{ى\ ر}{\underline{ب}}$$ الضرب غير ممكن.

وعندما يكون الضرب ممكناً فإن $\underline{أ} \cdot \underline{ب} \neq \underline{ب} \cdot \underline{أ}$

فضرب المصفوفات غير تبديلي بشكل عام.

وإذا ما ركزنا على المصفوفات المربعة من الرتبة ٢ × ٢ واستثنينا المصفوفات الأخرى، فإن عملية الضرب دائماً ممكنة لتساوي الرتب كون هذا الشرط يحقق شرط الضرب بالمصفوفات والقائل "عدد أعمدة المصفوفة الأولى = عدد صفوف المصفوفة الثانية".

× عملية الضرب في المصفوفات تجميعية:

أي أن $\left(\underset{٢ \times ٢}{\underline{أ}} \cdot \underset{ى\ ر}{\underline{ب}}\right) \cdot \underset{٢ \times ٢}{\underline{حـ}} = \underset{٢ \times ٢}{\underline{أ}} \cdot \left(\underset{٢ \times ٢}{\underline{ب}} \cdot \underset{ى\ ر}{\underline{جـ}}\right)$

كون $\left(\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٢ - & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & ٣ - \end{pmatrix}$

$$(١) \longleftarrow \begin{pmatrix} ١٧ & ٣ \\ ٣٣ & ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨ & ٩ \\ ١٤ & ١٩ \end{pmatrix} =$$

وكذلك

$$\left(\begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$(٢) \longleftarrow \begin{pmatrix} ١٧ & ٣ \\ ٣٣ & ١٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٩ \\ ٩ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} =$$

لأن الجوابين (١) ، (٢) متساويان.

× والضرب يتوزع على الجمع في المصفوفات كما هو آت:

$$\begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -٢ & ١ \\ ٥ & ٤ \end{pmatrix} \Big) \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٣ \\ ١ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} +$$

كون الطرف الأيمن =

$$(١) \longleftarrow \begin{pmatrix} ١١ & ٦ \\ ٢١ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١ & ٤ \\ ٦ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$$

والأيسر=

$$(٢) \longleftarrow \begin{pmatrix} ١١ & ٦ \\ ٢١ & ١٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ & -٣ \\ ٧ & -٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٨ & ٩ \\ ١٤ & ١٩ \end{pmatrix}$$

لأن الجوابين (١) ، (٢) متساويان

× أما عملية القسمة فيمكن تفسيرها في المصفوفات كما هي في الأعداد الحقيقية وعلى نفس المنوال كما في هذا المثال:

من المعلوم أن ٥ ÷ ٦ = ٥ × مقلوب العدد ٦ = ٥ × النظير الضربي للعدد ٦

$= ٥ \times \frac{١}{٦}$ هذا في حقل الأعداد الحقيقية.

وبكيفية مماثلة لهذه الطريقة سنعالج قسمة المصفوفات كما هو آت:

$\frac{أ}{٢ \times ٢} \div \frac{ب}{٢ \times ٢} = \frac{أ}{٢ \times ٢} \times$ مقلوب المصفوفة $\frac{ب}{٢ \times ٢} =$

$\frac{أ}{٢ \times ٢} \times$ النظير الضربي للمصفوفة $\frac{ب}{٢ \times ٢}$ ،

ولنبدأ بإيجاد النظير الضربي للمصفوفة المربعة أو مقلوب المصفوفة المربعة كما يلي:

اذا كانت المصفوفة $\frac{س}{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ وكأن (أ · د) − (ب · جـ) $\neq$ صفر

فإن للمصفوفة $\frac{س}{٢ \times ٢}$ نظير ضرب أو مقلوب يرمز له بالرمز $\frac{س^{-١}}{٢ \times ٢}$

وأما اذا كان أ د − ب جـ = صفر فلا يوجد للمصفوفة $\begin{pmatrix} أ & ب \\ جـ & د \end{pmatrix}$ نظير ضربي عندها تسمى المصفوفة منفردة Signular matrix

كما في الأمثلة التالية:

مثال:

هل للمصفوفة $\frac{س}{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} ١ & -٥ \\ -١ & ٥ \end{pmatrix}$ نظير ضربي؟

الحل: نجد أ د − ب جـ = (١ × ٥) − (− ١ × ٥)

= ٥ − ٥ = صفر

الجواب: لا ليس لها نظير ضربي فهي منفردة.

مثال:

هل للمصفوفة $\frac{ص}{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} ١ & ٣ \\ -١ & ٢ \end{pmatrix}$ نظير ضربي؟

الحل: نجد أ د – ب جـ = (١) (٢) – (٣ × ١)

= ٢ + ٣ = ٥ .

الجواب: نعم لها نظير ضربي.

والسؤال الآن: ما هو النظير الضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ ؟

الحل: نجد كما يلي:

النظير الضربي أو مقلوب المصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$ ويكتب على الشكل $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}^{١-}$

يساوي: $\dfrac{١}{أ\,د - ب\,جـ}$ = $\begin{pmatrix} (٣) - & ٢ \\ ١\ (١\ -) & - \end{pmatrix}$ بعد تبديل أ محل د وتغيير اشارتي كل من ب ، جـ

هكذا:

$$= \frac{١}{٥} \begin{pmatrix} ٣ - & ٢ \\ ١ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٣ -)\left(\frac{١}{٥}\right) & (٢)\left(\frac{١}{٥}\right) \\ (١)\left(\frac{١}{٥}\right) & (١)\left(\frac{١}{٥}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} - & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix}$$

أي أن $\begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} - & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix}$ هي النظير الضربي للمصفوفة $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$

لأن $\begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} - & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٣}{٥} - & \frac{٢}{٥} \\ \frac{١}{٥} & \frac{١}{٥} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٣ & ١ \\ ٢ & ١- \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ١ & ٠ \end{pmatrix}$$

مع ملاحظة أن الضرب في هذه الحالة فقط تبديلي.

والجواب في الحالتين $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ مصفوفة الوحدة المحايدة للضرب.

والآن قسمة المصفوفات المربعة من الرتبة ٢×٢ تتم كما يلي:

اقسم: $\underset{٢ \times ٢}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ على $\underset{٢ \times ٢}{\text{ب}} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$

كون $\underset{٢ \times ٢}{\text{أ}}$ ، $\underset{٢ \times ٢}{\text{ب}}$ كلاهما غير منفردة (تأكد من ذلك) فإن القسمة بالرموز:

$$\underset{٢ \times ٢}{\text{أ}} \div \underset{٢ \times ٢}{\text{ب}} = \underset{٢ \times ٢}{\text{أ}} \cdot \underset{٢ \times ٢}{\text{ب}^{-١}}$$

أي أنه حتى تقسم المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$ على المصفوفة $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فإننا نضرب المصفوفة $\begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}^{-١}$

فإننا نجد $\begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}^{-١}$ (النظير الضربي)

أ د − ب جـ = (٢ × ٥) − (٣ × ٢) = ١٠ − ٦ = ٤ ≠ صفر

فإن $\begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ٥ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{٤} \begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٥}{٤} & \frac{-٣}{٤} \\ \frac{-٢}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{pmatrix}$

والآن $\underset{٢ \times ٢}{\text{أ}} \div \underset{٢ \times ٢}{\text{ب}} = \underset{٢ \times ٢}{\text{أ}} \times \underset{٢ \times ٢}{\text{ب}^{-١}} =$

$$= \begin{pmatrix} ١ & ٤ \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{٥}{٤} & \frac{-٣}{٤} \\ \frac{-٢}{٤} & \frac{٣}{٤} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{٥}{٤} - \frac{٨}{٤} & \frac{-٣}{٤} + \frac{١٢}{٤} \\ \frac{١٥}{٤} - \frac{٤}{٤} & \frac{-٩}{٤} + \frac{٦}{٤} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-٣}{٤} & \frac{٩}{٤} \\ \frac{١١}{٤} & \frac{-٣}{٤} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{١}{٤} \begin{pmatrix} -٣ & ٩ \\ ١١ & -٣ \end{pmatrix}$$ هذا خارج القسمة

مثال:

أوجد النظير الضربي للمصفوفة $أ_{٢\times٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & -٨ \end{pmatrix}$ وأوجده؟

أ د − ب جـ = ٢ (− ٨) − ١ (٧) = − ١٦ − ٧ = − ٢٣ ≠ صفر

نعم يوجد نظير ضربي للمصفوفة $أ_{٢\times٢}$ ورمزه $أ^{-١}_{٢\times٢}$ وإيجاده هكذا:

$$أ^{-١}_{٢\times٢} = \frac{١}{-٢٣} \begin{pmatrix} -٨ & -١ \\ -٧ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{٢٣} & \frac{١}{٢٣} \\ \frac{٧}{٢٣} & \frac{-٢}{٢٣} \end{pmatrix}$$

وللتحقق $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & -٨ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{٨}{٢٣} & \frac{١}{٢٣} \\ \frac{٧}{٢٣} & \frac{-٢}{٢٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{٨}{٢٣} & \frac{١}{٢٣} \\ \frac{٧}{٢٣} & \frac{-٢}{٢٣} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٧ & -٨ \end{pmatrix}$

"الضرب في هذه الحالة فقط تبديلي "المصفوفة × نظيرها الضربي= النظير الضربي × المصفوفة"

$$= \begin{pmatrix} \frac{٢٣}{٢٣} & \frac{٢}{٢٣} - \frac{٢}{٢٣} \\ \frac{٥٦}{٢٣} - \frac{٥٦}{٢٣} & \frac{٧}{٢٣} + \frac{١٦}{٢٣} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$ مصفوفة الوحدة.

المصفوفة المحايدة لعملية الضرب

ملحوظة جديرة بالاهتمام:

هناك خاصية في المصفوفات لم ولن تجد لها مثيلاً في حقل الأعداد الحقيقية على الاطلاق وهي:

يمكن أن يكون حاصل ضرب مصفوفتين هو المصفوفة الصفرية دون أن تكون أي من هاتين المصفوفتين المصفوفة الصفرية.

هكذا: $$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٢ & ١ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ١ \\ ٠ & ٤ \\ ٠ & ٣ \end{pmatrix}$$

وكذلك $$\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$

عندها تسمى هاتان المصفوفتان قواسم المصفوفة المصفرية، وتجاوزاً قواسم الصفر (في المصفوفات).

وهذه الخاصية تخالف القاعدة الهامة في الأعداد الحقيقية القائلة: إذا كان حاصل ضرب عددين حقيقيين هو الصفر، فإن أحدهما أو كلاهما يجب أن يكون صفراً. وبالرموز:

إذا كان أ · ب = صفر ، لكل أ ، ب ∋ ح

فإن أ = صفر ، ب = صفر أو كليهما.

والتي تستخدم في حل بعض المعادلات التربيعية في حقل الأعداد الحقيقية بطريقة التحليل الى العوامل كما مرّ سابقاً.

((س^{٢} – ٥س - ٦ = صفر ⟵ (س – ٦) (س + ١) = صفر

وعندما س - ٦ = صفر ، س + ١ = صفر

لذا فإن س = ٦ ، - ١)).

(٧ - ٤) المحددات:

أما المحددة Determinant:

فقد نتج مفهومها عن دراسة أنظمة المعادلات الخطية ثم تطور هذا المفهوم حتى شملت تطبيقاته مواضيع رياضية عديدة في مجالات العلوم كالتخطيط والاقتصاد والصناعة وعلم الاجتماع وغيرها..

والمحدودات أعداد تحدد فيما اذا كان للنظام المكون من معادلات خطية حلّ أم لا ، والمحددة نفسها تستخدم لإيجاد هذا الحل إن وجد كما سيأتي فيما بعد.

هذا ويرتبط بكل مصفوفة مربعة عدد حقيقي يُسمى "محددة المصفوفة".

فإذا كانت $\underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{أ}}} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة

فتعرف محددة المصفوفة $\underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{أ}}}$ والتي يرمز لها بالرمز $\left| \underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{أ}}} \right|$ على النحو:

$$\left| \underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{أ}}} \right| = \begin{vmatrix} \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \end{vmatrix} = \text{أ}_{١١}\ \text{أ}_{٢٢} - \text{أ}_{٢١}\ \text{أ}_{١٢}$$

مثال:

اذا كانت $\underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{أ}}} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{pmatrix}$ أوجد $\left| \underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{أ}}} \right|$ ، $\left| \underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{ب}}} \right|$

$$\underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{ب}}} = \begin{pmatrix} ٤- & ١- \\ ٣ & ٢ \end{pmatrix}$$

$$\left| \underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{أ}}} \right| = \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٥ & ٣ \end{vmatrix} = (٢)(٥) - (١)(٣) = ١٠ - ٣ = ٧$$

وكذلك $\left| \underset{٢ \times ٢}{\underline{\text{ب}}} \right| = \begin{vmatrix} ٤- & ١- \\ ٣ & ٢ \end{vmatrix} = (١-)(٣) - (٢)(٤-)$

$$= (٣-) - (٨-)$$

$$= -٣ + ٨ = ٥$$

وإذا كانت $\underset{3\times 3}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{pmatrix}$

فإن محددة $\underset{3\times 3}{\text{أ}} = \left| \underset{3\times 3}{\text{أ}} \right|$

$= \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣١} & \text{أ}_{٢١} & \text{أ}_{١١} \\ \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} =$ نبدأ بالصف الأول ونأخذ $\text{أ}_{١١}$ ، $\text{أ}_{٢١}$ ، $\text{أ}_{٣١}$ ونفرط أعمدة $\left| \underset{3\times 3}{\text{أ}} \right|$ بالطريقة التالية:

$$\begin{vmatrix} \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٢٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} \text{أ}_{٣١} + \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{١٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{١٣} \end{vmatrix} \text{أ}_{٢٩} - \begin{vmatrix} \text{أ}_{٣٢} & \text{أ}_{٢٢} \\ \text{أ}_{٣٣} & \text{أ}_{٢٣} \end{vmatrix} =$$

مثال:

اذا كانت $\underset{3\times 3}{\text{أ}} = \begin{pmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ ٢- & ٢ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٥ \end{pmatrix}$ فجد $|\text{أ}|$

الحل:

$|\text{أ}| = \begin{vmatrix} ٣ & ٤ & ٢ \\ ٢- & ٢ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٥ \end{vmatrix}$ ولفرطه لمحددات ثنائية نقول:

نأخذ العدد ٢ من الصف الأول ونضربه بالمحددة الناتجة دون أخذ الصف أو العامود الذي يحوي العدد ٢ هكذا:

$$\begin{vmatrix} ٢- & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} ٢$$

ونأخذ العدد ٤ من الصف الأول ونضربه بالمحددة الناتجة دون أخذ الصف أو العامود الذي يحوي العامود ٤ هكذا:

$$\begin{vmatrix} ٢- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} ٤$$

وكذلك نأخذ العدد ٣ من الصف الأول ونضربه بالمحددة الناتجة دون أخذ الصف أو العامود الذي يحوي العدد ٣ هكذا:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} ٣$$

والآن نعيد ترتيب المحددة الثنائية هكذا:

$$\begin{vmatrix} ٢ & ١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} ٣ + \begin{vmatrix} ٢- & ١ \\ ٢ & ٥ \end{vmatrix} ٤ -$$ "تغيرات رقمه فقط" $$\begin{vmatrix} ٢- & ٢ \\ ٢ & ٢ \end{vmatrix} ٢ = |أ|$$

= ٢ (٤ + ٤) - ٤ (٢ + ١٠) + ٣ (٢ - ١٠)

= ٢ (٨) - ٤ (١٢) - ٢٤ = ١٦ - ٤٨ - ٢٤ = - ٥٦

لدراسة العمليات الحسابية المرتبطة بالمحددات لا بّد من بيان خصائص هذه المحددات والتي تُسهل كثيراً من هذه العمليات الحسابية وتوفر الوقت والجهد عند اجرائها، ومن هذه الخواص وللمصفوفات المربعة فقط:

(i) اذا كانت مدخلات صفين أو عامودين في مصفوفة متطابقتين، فإن قيمة المحددة = صفر

مثال:

محددة أ = $$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ & ٣ \\ ١ & ٢ & ٢ \\ ٦ & ٤ & ٤ \end{vmatrix}$$ تساوي صفراً كون العامود الأول يطابق العامود الثاني

هكذا |أ| = ٣ (١٢ - ٤) - ٣ (١٢ - ٤) + ٥ (٨ - ٨)

= ٢٤ - ٢٤ + صفر = صفر

(ii) إذا غيرنا وضع المحدد بحيث جعلنا المحددة صفوفاً مصفوفة أعمدة فإن قيمة المحددة لا تتغير اطلاقاً.

مثال:

قيمة محددة |أ| $$\begin{vmatrix} ٥ & ٣ \\ ٧ & ٢ \end{vmatrix}$$ = قيمة محددة |ب| = $$\begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٧ & ٥ \end{vmatrix}$$ بعد تغيير الصفوف بالأعمدة

هكذا: |أ| = (٣) (٧) – (٢) (٥) = ٢١ – ١٠ = ١١

|ب| = (٣) (٧) – (٥) (٢) = ٢١ – ١٠ = ١١

(iii) عند تبديل صف مكان صف أو عامود مكان عامود في مصفوفة مربعة فإن محددة المصفوفة الجديدة تساوي محددة المصفوفة الأصلية بالمقدار وتخالفها بالإشارة.

مثال:

|أ| = | ٥ ٣ ؛ ٤ ١- | ، |ب| = | ٣ ٥ ؛ ١- ٤ | بعد تغيير العامود الأول بالثاني

هكذا: |أ| = (٥ × -١ - ٣ × ٤) = -٥ - ١٢ = -١٧

|ب| = (٣ × ٤ – (٥ × -١)) = ١٢ + ٥ = ١٧

× "إذا تناسب صفات أو عامودات" أي اذا كان أحد الصفوف أو الأعمدة في مصفوفة ما يساوي عدداً ثابتاً مضروباً في الصف الآخر أو العامود الآخر فإن قيمة محددة المصفوفة يساوي صفر.

مثال:

|أ| = | ٢ ٤ ؛ ١٠ ٢٠ | العامود الثاني = العامود الأول × العدد ٢

أو الصف الثاني = الصف الأول × العدد ٥

هكذا |أ| = (٢ × ٢٠ - ١٠ × ٤) = ٤٠ - ٤٠ = صفر

× إذا كانت جميع مدخلات صف أو عامود في مصفوفة ما أصفاراً فإن قيمة محددة المصفوفة تلك يساوي صفراً.

مثال:

|أ| = | ٠ ٠ ؛ ٥ ٣ |

هكذا |أ| = (٠ × ٣) - ٥ (٠) = صفر

(٧ – ٥) تطبيقات على المحددات والمصفوفات

(i) تستخدم المحددات في ايجاد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين أ($س_١$، $ص_١$) ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) حيث المعادلة تنتج من المحددة

$$\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ س_١ & ص_١ & ١ \\ س_٢ & ص_٢ & ١ \end{vmatrix} = صفر$$

مثال:

اذا كانت أ (٣ ، ٤) ، ب (– ٥ ، ٦)

فإن معادلة الخط المستقيم $\overleftrightarrow{أب}$ تعطى من المحددة

$$\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ ٣ & ٤ & ١ \\ -٥ & ٦ & ١ \end{vmatrix} = صفر$$

هكذا: $س \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} - ص \begin{vmatrix} ٣ & ١ \\ -٥ & ١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٣ & ٤ \\ -٥ & ٦ \end{vmatrix} = صفر$

أي أن:

س (٤ – ٦) –ص (٣ + ٥) + ١ (١٨ + ٢٠) = صفر

– ٢س – ٨ ص + ٣٨ = صفر

أو – ٨ ص = ٢ س – ٣٨

$- \frac{٨ ص}{٨} = \frac{٢ س}{٨} + \frac{٣٨}{٨}$

$ص = - \frac{١}{٤} ص + \frac{١٩}{٤}$

وللتحقق من صحة الحل:

نجد ١– معادلة الخط المستقيم كما في القانون $ص - ص_١ = م_{أب} (س - س_١)$ (هندسة تحليلية) هكذا:

$م_{المستقيم} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٦ - ٤}{-٥ - ٣} = \frac{٢}{-٨} = - \frac{١}{٤}$

كما هو في المعادلة حيث حاصل س = $- \frac{١}{٤}$

ولو أوجدنا المعادلة بالهندسة التحليلية:

$$\text{ص} - \text{ص}_{١} = \text{م}_{\text{المستقيم}} (\text{س} - \text{س})$$

$$\text{ص} - ٦ = - \frac{١}{٤} (\text{س} + ٥)$$

$$\text{ص} - ٦ = - \frac{١}{٤} \text{س} - \frac{٥}{٤}$$

$$\text{ص} = - \frac{١}{٤} \text{س} + \frac{٤ \times ٦}{١ \times ٤} - \frac{٥}{٤}$$

$$\text{ص} = - \frac{١}{٤} \text{س} + \boxed{\frac{٢٤}{٤} - \frac{٥}{٤}} \longrightarrow \text{ص} = - \frac{١}{٤} \text{س} + \frac{١٩}{٤} \quad \text{نفس المعادلة}$$

(ii) وهناك تطبيق آخر على المحددات هو ايجاد مساحة المثلث أ ب جـ بمعرفة احداثيات رؤوسه كما يلي:

اذا كانت النقط أ $(\text{س}_{١} ، \text{ص}_{١})$

ب $(\text{س}_{٢} ، \text{ص}_{٢})$

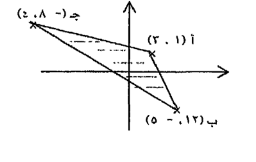
جـ $(\text{س}_{٣} ، \text{ص}_{٣})$ هي رؤوس المثلث أ ب جـ.

فإن مساحته يمكن ايجادها من المحددة:

$$\text{مساحة المثلث} = \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} \text{س}_{١} - \text{س}_{٣} & \text{ص}_{١} - \text{ص}_{٣} \\ \text{س}_{٢} - \text{س}_{٣} & \text{ص}_{٢} - \text{ص}_{٣} \end{vmatrix}$$

وبما أن المساحة دائماً موجبة لذا نستخدم الاشارة السالبة أعلاه عندما تؤول قيمة المحددة الى كمية سالبة لتصبح المساحة موجبة، وإلا فإننا نستخدم الاشارة الموجبة دائماً.

مثال:



أوجد مساحة المثلث الذي رؤوسه النقط

أ(١ ، ٣) ، ب (١٢ - ٥) ، جـ (- ٨ ، ٤)

$$\text{المساحة} = \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ١ - ´٨ & ٣ - ٤ \\ ٢ - ´٨ & -٥ - ٤ \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٩ & -١ \\ ١٠ & -٩ \end{vmatrix}$$

المساحة $= \pm \frac{١}{٢} \{ (٩)(-٩) - (-١)(١٠) \}$

$= \pm \frac{١}{٢} \{ -٨١ + ١٠ \}$

$= \pm \frac{١}{٢} \{ -٧١ \}$ وهنا نستخدم $- \frac{١}{٢}$

∴ المساحة $= - \frac{١}{٢} (-٧١) = \frac{٧١}{٢} = ٣٥,٥$ وحدة مساحة.

(iii) وهناك تطبيق ثالث على المحددات والمصفوفات معاً وهو حل نظام من المعادلات الخطية بمتغيرين وثلاثة متغيرات.

والحل يتم بطريقتين:

الأولى: بالمحددات وبقاعدة كريمر بالذات.

والثانية: بالمصفوفات وبعمليات الصف البسيط بالتأكيد.

ولنبدأ بالطريقة الأولى:

لقد طوّر العالم السويسري كريمر (١٧٠٤ - ١٧٥٢) م عام ١٧٥٠ م طرقاً خاصة باستخدام المحددات لحل أنظمة من المعادلات الخطية

بمتغيرين على الصورة: أ س + ب ص + جـ = صفر

وثلاثة متغيرات على الصورة: أ س + ب ص + جـ ع + د = صفر

كما يلي:

× **قاعدة كريمر** Cramer's Rule في حل المعادلات الخطية.

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام ٥ س = ص + ٢

ص = ٧ − ٤ س مستخدماً قاعدة كريمر:

يجب وضع المعادلات الخطية على الصورة أ س + ب ص = جـ كونها بمتغيرين فقط هكذا:

م معادلات . م المتغيرات = م الثوابت

تم كتابة النظام على الصورة $\begin{pmatrix} ١ - & ٥ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ \\ ٧ \end{pmatrix}$

حيث م = $\begin{pmatrix} ١ - & ٥ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المعاملات

و $\begin{pmatrix} س \\ ص \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة المتغيرات

و $\begin{pmatrix} ٢ \\ ٧ \end{pmatrix}$ تسمى مصفوفة الثوابت

ثم نجد قيمة المحددات التالية:

|م| = $\begin{vmatrix} ١ - & ٥ \\ ١ & ٤ \end{vmatrix}$ (٥) (١) − (١ -) (٤) = ٥ + ٤ = ٩

|مس| باستبدال معاملات العامود الأول (الثوابت)

أي |مس| = $\begin{vmatrix} ١ - & ٢ \\ ١ & ٧ \end{vmatrix}$ = (٢) (١) − (١ -) (٧)

= ٢ + ٧ = ٩

ومنها س = $\frac{|مس|}{|م|}$ = $\frac{٩}{٩}$ = ١

|مص| باستبدال معاملات العامود الثاني (الثوابت)

أي |مص| = $\begin{vmatrix} ٢ & ٥ \\ ٧ & ٤ \end{vmatrix}$ = (٥) (٧) − (٢) (٤)

= ٣٥ - ٨ = ٢٧

ومنها ص = $\frac{|مص|}{|م|}$ = $\frac{٢٧}{٩}$ = ٣

مجموعة الحل للنظام {(١ ، ٣)}[1]

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام ٤ س + ٥ ص + ٥ ع = ١٤

٣ س + ٥ ص + ١ ع = ٩

٢ س + ٢ ص + ٢ ع = ٦ مستخدماً قانون كريمر

$$|م| = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ٥ \\ ٣ & ٥ & ١ \\ ٢ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ٤\,(١٠ - ٢) - ٥\,(٦ - ٢) + ٥\,(٦ - ١٠)$$

$$= ٤\,(٨) - ٥\,(٤) + ٥\,(- ٤)$$

$$= ٣٢ - ٢٠ - ٢٠ = - ٨$$

$$|م_{س}| = \begin{vmatrix} ١٤ & ٥ & ٥ \\ ٩ & ٥ & ١ \\ ٦ & ٢ & ٢ \end{vmatrix} = ١٤\,(٨) - ٥\,(١٢) + ٥\,(- ١٢)$$

$$= ١١٢ - ٦٠ - ٦٠ = - ٨$$

$$|م_{ص}| = \begin{vmatrix} ٤ & ١٤ & ٥ \\ ٣ & ٩ & ١ \\ ٢ & ٦ & ٢ \end{vmatrix} = ٤\,(١٢) - ١٤\,(٤) + ٥\,(٠)$$

$$= ٤٨ - ٥٦ = - ٨$$

$$|م_{ع}| = \begin{vmatrix} ٤ & ٥ & ١٤ \\ ٣ & ٥ & ٩ \\ ٢ & ٢ & ٦ \end{vmatrix} = ٤\,(١٢) - ٥\,(٠) + ١٤\,(- ٤)$$

$$= ٤٨ - ٥٦ = - ٨$$

$$س = \frac{|م_{س}|}{|م|} = \frac{- ٨}{- ٨} = ١$$

$$ص = \frac{|م_{ص}|}{|م|} = \frac{- ٨}{- ٨} = ١$$

$$ع = \frac{|م_{ع}|}{|م|} = \frac{- ٨}{- ٨} = ١$$

مجموعة الحل = { (١ ، ١ ، ١) } .

الطريقة الثانية: فهي حل الأنظمة النمطية بالمصفوفات وتتم بعمليات الصف البسيط Simple Row Operations كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للنظام س + ص = ٩ ، س + ٤ ص = ١٨ باستخدام عمليات الصف البسيط، وطريقة الحل بشيء من الايجاز.

× نكون ما يسمى بالمصفوفة الموسعة Extension matrix هكذا:

والمصفوفة الموسعة هي التي تتكون من معاملات المتغيرات والثوابت (الحدود المطلقة) في النظام كما يلي:

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & ١ & ٩ \\ ١ & ٤ & ١٨ \end{array}\right)$$

ثم نحوّل هذه المصفوفة الى مصفوفة أخرى على الشكل:

$$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & ٠ & س_١ \\ ١ & ٤ & ص_١ \end{array}\right)$$

حيث القسم الأيمن منها مصفوفة الوحدة $\begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$ والأيسر منها مجموعة الحل للنظام (س$_١$ ، ص$_١$)

وذلك بواحدة أو أكثر من العمليات التالية:

- تبديل ترتيب صفوف المصفوفة الموسعة كأن نبدل الصف الأول بالثاني والعكس.
- ضرب أي صف في المصفوفة الموسعة بعدد حقيقي مغاير للصفر ثم جمعه أو طرحه من صف آخر.

ومن هنا جاء اسم عمليات الصف البسيط.

وأما الحل هكذا:

طرحاً $\left(\begin{array}{cc|c} ① & ١ & ٩ \\ ١ & ④ & ١٨ \end{array}\right)$ نجعل كل مدخلة من المدخلات داخل الدوائر المنقطة واحد صحيح والباقي أصفار.

كما يلي:

$-\frac{١}{٣}$ $\left(\begin{array}{cc|c} ① & ١ & ٩ \\ ١ & ③ & ٩- \end{array}\right)$ اطرح الصف الثاني من الصف الأول

اضرب الثاني $-\frac{١}{٣}$

طرحاً $\left(\begin{array}{cc|c} ① & ١ & ٩ \\ ١ & ① & ٣ \end{array}\right)$ اطرح الثاني من الصف الأول

$\left(\begin{array}{cc|c} ١ & ٠ & ٦ \\ ٠ & ٠ & ٣ \end{array}\right)$

أي أن س = ٦ ، ص = ٣

عندها تكون مجموعة الحل = { (٦ ، ٣) } تحقق من صحة ذلك الحل.

ونستخدم طريقة عمليات الصف البسيط هذه في حل أنظمة من المعادلات الخطية التي تحتوي على ثلاثة متغيرات كما يلي:

مثال:

حل النظام:

س + ص + ع = ٢

س + ٣ ص + ٣ ع = ٢

٢ س – ص – ع = ١ بطريقة الصف البسيط

الحل:

نكتب المصفوفة الموسعة $\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٣ & ٢ \\ ٢ & ١- & ١- & ١ \end{array}\right)$

ونحول مصفوفة المعاملات فيها الى مصفوفة الوحدة كالتالي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ الى مصفوفة الوحدة $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ ان أمكن ذلك

عندها تتحول مصفوفة الثوابت $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ الى $\begin{pmatrix} س_1 \\ ص_1 \\ ع_1 \end{pmatrix}$

وهي تكافئ مجموعة الحل للنظام أي $\{(س_1 ، ص_1 ، ع_1)\}$ هكذا:

(-1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

نحاول أن نحصل على الأصفار وبشكل دائري هكذا:

(-2)

ضرب الصف الأول في - ١ وجمعه الى الثاني

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

ضرب الصف الأول بالعدد - ٢ وجمعه الى الثاني

$(\frac{1}{2})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

ضرب الصف الثاني بالعدد $\frac{1}{2}$

ضرب الصف الثاني بالعدد ٣ واضافته الى الثالث

(3)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

ضرب الصف الثالث بالعدد $-\frac{2}{3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{3}{2} & -3 \end{array}\right)$$

$(-\frac{2}{3})$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & \frac{١}{٢} & ٠ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right) (-\tfrac{١}{٢})$$

← ضرب الثالث بالعدد $-\frac{١}{٢}$ واضافته الى الثاني

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ١ & ٢ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right) (-١)$$

← ضرب الثالث بالعدد - ١ وجمعه الى الأول

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & ٠ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right) (-١)$$

← ضرب الثاني بالعدد - ١ وجمعه الى الأول

$$\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٠ & ٠ & ١ \\ ٠ & ١ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٢ \end{array}\right)$$

ومنه $س_١ = ١$ ، $ص_١ = -١$ ، $ع_١ = ٢$

مجموع الحل للنظام = { (١ ، - ١ ، ٢) }

"تحقق من صحة الحل بطريقة كريمة"

ملحوظة:

"طريقة كريمر لحل النظام من المعادلات الخطية بمتغيرين أو ثلاثة متغيرات هي الأسهل، ولكن طريقة الصف البسيط هي الأشهر، والتوضيح سيأتي في فصل لاحق من هذا المؤلف"

(٧ - ٦) أمثلة محلولة على المصفوفات والمحددات

مثال (١) :

موسى ومحمود ومعين ثلاثة مزارعين يمتلكون ثلاث مزراع للحمضيات

زرع موسى في مزرعته ١٥٠ شجرة ليمون، ١٢٠ شجرة برتقال، ٥٠ شجرة مندلينا

وزرع محمود في مزرعته ٨٠ شجرة ليمون ١٠٠ شجرة برتقال ولم يزرع مندلينا على الاطلاق

وزرع مُعين في مزرعته ٢٠٠ شجرة ليمون، ١٧٠ شجرة برتقال، ٣٠ شجرة مندلينا

رتب المعلومات السابقة في جدول بسيط ثم اكتب المصفوفة التي تمثل هذا الجدول.

الحل:

هناك شكلان بالجدول هما :

الشكل الأول:

الشجرة / المزرعة	ليمون	برتقال	مندلينا
مزرعة موسى	١٥٠	١٢٠	٥٠
مزرعة محمود	٨٠	١٠٠	٠
مزرعة مُعين	٢٠٠	١٧	٣٠

أما المصفوفة التي تمثل هذا الجدول فهي:

$$\begin{pmatrix} ٥٠ & ١٢٠ & ١٥٠ \\ ٠ & ١٠٠ & ٨٠ \\ ٣٠ & ١٧٠ & ٢٠٠ \end{pmatrix} = \underset{٣ \times ٣}{أ}$$

الشكل الثاني:

الشجرة / المزرعة	مزرعة موسى	مزرعة محمود	مزرعة مُعين
ليمون	١٥٠	٨٠	٢٠٠
برتقال	١٢٠	١٠٠	١٧٠
مندلينا	٥٠	٠	٣٠

أما المصفوفة التي تمثل هذا الجدول فهي:

$$\underset{٣ \times ٣}{ب} = \begin{pmatrix} ٢٠٠ & ٨٠ & ١٥٠ \\ ١٧٠ & ١٠٠ & ١٢٠ \\ ٣٠ & ٠ & ٥٠ \end{pmatrix}$$

الملاحظ أن $\underset{٣ \times ٣}{أ} \neq \underset{٣ \times ٣}{ب}$ مع أنها نفس المعلومات كون الصفوف أحدها أصبحت أعمدة في الأخرى والعكس.

مثال (٢):

ما قيمة المتغير س اذا كان:

$$\begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ - & ٥س + ٦ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٥ \\ ١ - & س^{٢} \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفين متساويتان فإن مدخلاتها المتناظرة متطابقة.

أي أن $س^{٢} = ٥ س + ٦$

$س٢ - ٥س - ٦ = صفر$

$(س - ٦) (س + ٠) = صفر$

$س = ٦$ ، $س = - ١$ قيمة $س = \{- ١ ، ٦\}$

مثال (٣):

اذا كانت $أ = \begin{pmatrix} ١ - & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix}$

$جـ = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ١ - & ٢ - & ٣ - \end{pmatrix}$ أوجد كل ما يأتي إذا أمكن:

(i) $\frac{أ}{٢ \times ٢} + \frac{ب}{٢ \times ٢}$ يمكن كونها من نفس الرتبة

والجواب:

$$\begin{pmatrix} ١ - & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ & ٨ \\ ٧ & ١ \end{pmatrix}$$

(ii) $\frac{أ}{٢ \times ٢} - \frac{ب}{٢ \times ٢}$ يمكن كونها من نفس الرتبة

والجواب:

$$\begin{pmatrix} ١ - & ٥ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٣ & ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٣ - & ٢ \\ ١ & ١ - \end{pmatrix}$$

مثال (٤):

$أ = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ - & ١ \end{pmatrix}$ ، $ب = \begin{pmatrix} ٠ & ١ - & ٥ \\ ٨ & ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

أوجد إذا كان ممكناً:

(i) $\frac{أ}{٢ \times ٢} \cdot \frac{ب}{٢ \times ٢}$ يمكن كون عدد أعمدة الأول = عدد صفوف الثانية =٢

والجواب $\underset{٢ \times ٣}{جـ}$ هكذا:

$$\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ - & ١ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٠ & ١ - & ٥ \\ ٨ & ٠ & ٧ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨ + ٠ & ٠ + ٢ - & ٧ + ١٠ \\ ٨ \times ٣ - ٠ & ٠ + ١ - & ٢١ - ٥ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٧ & -٢ & ٨ \\ -١٦ & -١ & -٢٤ \end{pmatrix}$$

(ii) $\frac{أ}{٢\times٣} \cdot \frac{ب}{٢\times٢}$ لا يمكن كون عدد أعمدة الأول $\neq$ عدد صفوف الثاني

لأن ٣ $\neq$ ٢

مثال (٥):

إذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$

فأوجد $أ^{٢}$ ، ٥ أ إذا أمكن

(i) $أ^{٢} = \frac{أ}{٢\times٢} \cdot \frac{ب}{٢\times٢}$ يمكن كون عدد أعمدة الأول = عدد صفوف الثاني =٢

والجواب:

$$\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢٥ - صفر & -١٥ - ٦ \\ ٠ + ٠ & ٠ + ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٥ & -٢١ \\ ٠ & ٤ \end{pmatrix}$$

(ii) ٥ $\frac{أ}{٢\times٢}$ = دائماً يمكن هذا النوع من الضرب ٠ عدد حقيقي في مصفوفة

والجواب:

$$٥\begin{pmatrix} ٥ & -٣ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (٥)(٥) & (٥)(-٣) \\ (٥)(٠) & (٥)(٢) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٢٥ & -١٥ \\ ٠ & ١٠ \end{pmatrix}$$

مثال (٦):

أوجد النظير الضربي لكل من المصفوفات إذا كان لها نظير ضربي.

(i) $\begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}$

محدد المصفوفة = (١ × ٢) − (− ٤) (− ٦) = ٢ − ٢٤ = − ٢٢ لها نظير ضربي

$$\text{النظير الضربي} = \begin{pmatrix} -٤ & ١ \\ ٢ & -٦ \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{-٢٢}\begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ١ & ٦ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-٤}{٢٢} & \frac{-٢}{٢٢} \\ \frac{-١}{٢٢} & \frac{-٦}{٢٢} \end{pmatrix}$$

(ii) $\begin{pmatrix} -٦ & ٢ \\ ٣ & -١ \end{pmatrix}$

محدد المصفوفة = (٢ × ٣) − (− ٦) (− ١) = ٦ − ٦ = صفر

فهي منفردة ليس لها نظير ضربي.

(iii) $\begin{pmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} \\ -\text{جاس} & \text{جتاس} \end{pmatrix}$

محدد المصفوفة = (جاس) (− جاس) − (ص س) (جتاس)

$= -$ ص^{٢}س − ص^{٢} س $= -$ ١ (ص^{٢}س + ص^{٢} س)

$= (-$ ١) (١) $= -$ ١ $\neq$ صفر لها نظير ضربي

$$\text{النظير الضربي} = \begin{pmatrix} \text{جتاس} & \text{جاس} \\ -\text{جاس} & \text{جتاس} \end{pmatrix}^{-١} = \frac{١}{-١}\begin{pmatrix} -\text{ص س} & -\text{جاس} \\ \text{ص س} & -\text{ص س} \end{pmatrix}$$

$$= -١\begin{pmatrix} -\text{ص س} & -\text{ص س} \\ \text{ص س} & -\text{ص س} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{ص س} & \text{ص س} \\ -\text{ص س} & \text{ص س} \end{pmatrix}$$

والملاحظ أن النظير الضربي للمصفوفة هو نفس المصفوفة.

مثال (٧):

أوجد معادلة المستقيم المار بالنقطتين:

أ (٥ ، ٤) ، ب (٦ ، ٨) بالمحددات أولاً وبقوانين الهندسة التحليلية ثانياً.

معادلة الخط المستقيم ناتجة عن المحددة $\begin{vmatrix} س & ص & ١ \\ ٥ & ٤ & ١ \\ ٦ & ٨ & ١ \end{vmatrix}$ = صفر هكذا:

$$س \begin{vmatrix} ٤ & ١ \\ ٨ & ١ \end{vmatrix} - ص \begin{vmatrix} ٥ & ١ \\ ٦ & ١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ٥ & ٤ \\ ٦ & ٨ \end{vmatrix} = صفر$$

أي أن وبعد فك المحدودات:

س (٤ - ٨) – ص (٥ - ٦) + ١ (٤٠ - ٢٤) = صفر

- ٤ س + ص + ١٦ = صفر

أو: | ص = ٤ س – ١٦ |

أما الحل بقوانين الهندسة التحليلية فهكذا:

معادلة الخط المستقيم:

ص – ص١ = $م_{أب}$ (س – س١) حيث $م_{أب}$ هو ميل الخط المستقيم

$$م_{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٨ - ٤}{٦ - ٥} = ٤$$

وبأخذ النقطة أ (٥ ، ٤)

فإن: ص - ٤ = ٤ (س - ٥)

ص - ٤ = ٤ س - ٢٠

∴ ص = ٤ س - ٢٠ + ٤

∴ | ص = ٤ س - ١٦ |

الجواب نفسه في الطريقتين.

مثال (٨):

احسب مساحة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه النقط:

أ (٣ ، ٤) ، ب (- ١ ، ٢) ، جـ (١ ، ٦)

المساحة بالمحددات هي: (بالمحددات أولا) وبالقانون $\sqrt{ح(ح-أَ)(ح-بَ)(ح-جَ)}$ ثانياً

جـ (١ ، ٦) ص
أ (٣ ، ٤)
ب (- ١ ، ٢)
س

$$المساحة = \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} س_١ - س_٢ & ص_١ - ص_٢ \\ س_٢ - س_٣ & ص_٢ - ص_٣ \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٣ - ١ & ٤ - ٦ \\ -١ - ١ & ٢ - ٦ \end{vmatrix} = \pm \frac{١}{٢} \begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ -٢ & -٤ \end{vmatrix}$$

$$= \pm \frac{١}{٢} \{(٢)(-٤) - (-٢)(-٢)\} = \pm \frac{١}{٢} \{-٨ - ٤\}$$

$$= \pm \frac{١}{٢} \{-١٢\} = (-\frac{١}{٢})(-١٢) = ٦$$ وحدات مساحة.

أما الحل بالقانون:

فإننا نجد الأطوال $أَ = \sqrt{(س^٢ - س^١)^٢ + (ص^٢ - ص^١)^٢} = \sqrt{٤^٢ + ٢^٢}$

$$= \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$$

$$بَ = \sqrt{٢^٢ + ٢^٢} = \sqrt{٨} = ٢\sqrt{٢}$$

$$جَ = \sqrt{١٦ + ٤} = \sqrt{٢٠} = ٢\sqrt{٥}$$

$$ح = \frac{أَ \times بَ \times جَ}{٢} = \frac{٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٥} + ٢\sqrt{٢}}{٢} = \sqrt{٥} + \sqrt{٥} + \sqrt{٢}$$

$$= ٢\sqrt{٥} + \sqrt{٢}$$

المساحة = $\sqrt{(٢\sqrt{٥} + \sqrt{٢})(\sqrt{٢})(\sqrt{٢})(٢\sqrt{٥} - \sqrt{٢})}$

= $\sqrt{٢(٢٠ - ٢)}$ = $\sqrt{٢ \times ١٨}$ = $\sqrt{٢ \times ٢ \times ٣ \times ٣}$

= ٢ × ٣ = ٦ وحدات مساحة

الجواب نفسه في الطريقتين.

مثال (٩):

أوجد مجموعة الحل للنظام بطريقة كريمر:

س − ص = أ (١)

٣ س + ٤ ص = ٥ ب (٢)

$|م| = \begin{vmatrix} ١ & -١ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$ = (١ × ٤) − (−١) (٣) = ٤ + ٣

= ٧

$|م_س|$ = باستبدال معاملات العامود الأول بالثوابت

$|م_س| = \begin{vmatrix} أ & -١ \\ ٥ب & ٤ \end{vmatrix}$ = (٤) (أ) − (−١) (٥ ب)

= ٤ أ + ٥ ب

$|م_ص|$ باستبدال معاملات العامود الثاني بالثوابت

$|م_ص| = \begin{vmatrix} ١ & أ \\ ٣ & ٥ب \end{vmatrix}$ = (١) (٥ ب) − ٣ أ = ٥ ب − ٣ أ

س = $\frac{|م_س|}{|م|}$ = $\frac{٤أ + ٥ب}{٧}$

ص = $\frac{|م_ص|}{|م|}$ = $\frac{٥ب - ٣أ}{٧}$

مجموعة الحل = $\left\{ \frac{٤أ + ٥ب}{٧} ، \frac{٥ب - ٣أ}{٧} \right\}$

مثال (١٠):

اذا كانت س = [٣ ٤ ١]

$$ص = \begin{pmatrix} ٧ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix}$$

أوجد: (١) س · ص (٢) ص · س

(i) س · ص

$$[٣ \quad ٤ \quad ١] \cdot \begin{pmatrix} ٧ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix} = [٢١ + ٨ - ١] = [٢٨]$$

$$\underbrace{\overset{س}{١ \times ٣} \quad \overset{ص}{٣ \times ١}} = \overset{ع}{١ \times ١}$$

أما (ii) ص · س

$$\begin{pmatrix} ٧ \\ ٢ \\ -١ \end{pmatrix} \cdot [٣ \quad ٤ \quad ١] = \begin{pmatrix} ٢١ & ٢٨ & ٧ \\ ٦ & ٨ & ٢ \\ -٣ & -٤ & -١ \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\overset{ص}{٣ \times ١} \quad \overset{س}{١ \times ٣}} = \overset{ع}{٣ \times ٣}$$

طبعاً س · ص $\neq$ ص · س ولكن ليس هذا فحسب وإنما الفارق هائل جداً!!!!

مثال (١١):

ما قيمة س في المصفوفة أ = $\begin{vmatrix} ١٧ & ١٢ \\ س & ١٥ \end{vmatrix}$

اذا كان | أ | = ١٩٢

الحل:

$$|أ| = \begin{vmatrix} ١٧ & ١٢ \\ س & ١٥ \end{vmatrix} = (١٧ \times ١٥) - (س \times ١٢) = ١٩٢$$

أي ٢٥٥ – ١٢ س = ١٩٢

- ١٢ س = ١٩٢ - ٢٥٥

- ١٢ س = - ٦٣

$$س = \frac{-٦٣}{-١٢} = \frac{٦٣}{١٢} = \frac{٢١}{٤}$$

مثال (١٢):

ما قيمة ك التي تجعل المصفوفة $\underset{٢ \times ٢}{أ} = \begin{pmatrix} (ك + ٣) & ٣ \\ ٣ & (ك + ٣) \end{pmatrix}$ منفردة؟

حتى تكون $\underset{٢ \times ٢}{أ}$ منفردة يجب أن تكون |أ| = صفر هكذا:

$\begin{vmatrix} (ك + ٣) & ٣ \\ ٣ & (ك + ٣) \end{vmatrix}$ = صفر ← (ك + ٣) (ك + ٣) - ٣ × ٣ = صفر

أي $(ك + ٣)^٢$ – ٩ = صفر وتحليلها الى فرق بين مربعين

(ك + ٣ - ٣) (ك + ٣ + ٣) = صفر

ك (ك + ٦) = صفر

ك = صفر أولاً

ك = - ٦ ثانياً.

مثال (١٣):

اذا كانت ايرادات ثلاث سلع منتجتها شركة مقدرة بالدنانير هي:

٢٥٠٠ ، ٣٢٠٠ ، ٤٥٠٠

وكانت تكاليف انتاج هذه السلع بالدنانير وعلى الترتيب هي:

١٧٠٠ ، ٢٠٠٠ ، ٢٤٠٠

احسب صافي أرباح الشركة في كل سلعة باستخدام المصفوفات.

بما أن الأرباح = الإيرادات – التكاليف

فإن الايرادات المصفوفة $أ_{١ \times ٣} = \begin{pmatrix} ٢٥٠٠ \\ ٣٢٠٠ \\ ٤٥٠٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة الايرادات

$ب_{١ \times ٣} = \begin{pmatrix} ١٧٠٠ \\ ٢٠٠٠ \\ ٢٤٠٠ \end{pmatrix}$ مصفوفة التكاليف

مصفوفة الربح: $ر_{١ \times ٣} = \begin{pmatrix} ٢٥٠٠ \\ ٣٢٠٠ \\ ٤٥٠٠ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} ١٧٠٠ \\ ٢٠٠٠ \\ ٢٤٠٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٨٠٠ \\ ١٢٠٠ \\ ٢١٠٠ \end{pmatrix}$

مثال (١٤):

(i) حل النظام: ٢ س - ٣ ص + ع = - ٣

س + ٢ ص - ٢ ع = ٨

٣ س + ٤ ص – ع = ١٥

بطريقة كريمر.

الحل بطريقة كريمر:

$$|م| = \begin{vmatrix} ٢ & -٣ & ١ \\ ١ & ٢ & -٢ \\ ٣ & ٤ & -١ \end{vmatrix}$$

$$= ٢ \begin{vmatrix} ٢ & -٢ \\ ٤ & -١ \end{vmatrix} + ٣ \begin{vmatrix} ١ & -٢ \\ ٣ & -١ \end{vmatrix} + ١ \begin{vmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{vmatrix}$$

$$= ٢(-٢ + ٨) + ٣(-١ + ٦) + ١(٤ - ٦)$$

$$= (٢)(٦) + (٣)(٥) + (١)(-٢)$$

$$= ١٢ + ١٥ - ٢ = ٢٥$$

$$|م_س| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ & -٣ \\ -٢ & ٢ & ٨ \\ -١ & ٤ & ١٥ \end{vmatrix}$$

= - ٣ (- ٢ + ٨) + ٣ (- ٨ + ٣٠) + ١ (٣٢ - ٣٠)

= (- ٣) (٦) + (٣) (٢٢) + (١) (٢)

= - ١٨ + ٦٦ + ٢ = ٥٠

$$|م_ص| = \begin{vmatrix} ١ & -٣ & ٢ \\ -٢ & ٨ & ١ \\ -١ & ١٥ & ٣ \end{vmatrix}$$

= ٢ (+ ٨ + ٣٠) + ٣ (- ١ + ٦) + ١ (١٥ - ٢٤)

= ٢ (٢٢) + ٣ (٥) + ١ (- ٩)

= ٤٤ + ١٥ - ٩ = ٥٩ - ٩ = ٥٠

$$|م_ع| = \begin{vmatrix} -٣ & -٣ & ٢ \\ ٨ & ٢ & ١ \\ ١٥ & ٤ & ٣ \end{vmatrix}$$

= ٢ (٣٠ - ٣٢) + ٣ (٥ - ٢٤) - ٣ (٤ - ٦)

= (٢) (- ٢) + (٣) (- ٩) — (٣) (- ٢)

= - ٤ - ٢٧ + ٦ = - ٢٥

$س = \frac{|م_س|}{|م|} = \frac{٥٠}{٢٥} = ٢$ ، $ص = \frac{٥٠}{٢٥} = ٢$ ، $ع = \frac{-٢٥}{٢٥} = -١$

مجموعة الحل = { (٢ ، ٢ ، - ١) } بطريقة كريمر

(ii) حل النظام: س + ص + ٥ ع = - ٢

٢ س – ص - ٣ ع = ٣

س + ٢ ص + ٣ ع = ٢ بعمليات الصف البسيط

الحل:

نبدأ بكتابة المصفوفة الموسعة:

(٢-)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{ونحولها الى الشكل}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & س_1 \\ 0 & 1 & 0 & ص_1 \\ 0 & 0 & 1 & ع_1 \end{array}\right)$$

عندها مجموعة الحل = { (س$_1$ ، ص$_1$ ، ع$_1$) }

كما يلي:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & -13 & 7 \\ 0 & -1 & 2 & -4 \end{array}\right) \quad -\frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & -13 & 7 \\ 0 & 0 & \frac{19}{3} & -\frac{19}{3} \end{array}\right) \quad \frac{3}{19}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & -13 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad 13$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 5 & -2 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad -5$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \quad \frac{1}{3}$$

$$-\frac{1}{3}\left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ١ & \cdot & ١ \\ \cdot & -٣ & \cdot & ٦ \\ \cdot & \cdot & ١ & -١ \end{array}\right) \leftarrow \left(\begin{array}{cccc} ١ & \cdot & \cdot & ١ \\ \cdot & ١ & \cdot & ٢ \\ \cdot & \cdot & ١ & -١ \end{array}\right)$$

∴ $س_1 = ١$ ، $ص_1 = ٢$ ، $ع_1 = -١$

مجموعة الحل = {(٣ ، ٢ ، -١)}

مثال (١٥):

ما قيمة س التي تحقق المساواة بين المصفوفتين:

$$\begin{pmatrix} س^٣ - ٤س & س^٢ \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & ٢\,س \\ ٧ & ٨ \end{pmatrix}$$

بما أن المصفوفتين متساويتان فإن مدخلاتها المتناظرة متساوية

∴ $س^٣ - ٤\,س = صفر$ (١) و $س^٢ = ٢\,س$

$س\,(س^٢ - ٤) = صفر$ ، $س^٢ - ٢\,س = صفر$

$س\,(س + ٢)\,(س - ٢) = صفر$ ، $س\,(س - ٢) = صفر$

{-٢ ، ٢٥٠} ∩ {صفر ، ٢} = {صفر ، ٢}

∴ قيم س التي تحقق المساواة هما:

= {صفر ، ٢} فقط

حيث س = -٢ لا تحقق المساواة.

مثال (١٦):

اذا كانت $ج_{٢×٢} = \begin{vmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{vmatrix}$

اذا كان ذلك ممكناً أوجد:

(i) $\underline{ج} + \underline{ج}$

(ii) $- ٥ \underline{ج}$

(iii) $|٣ \underline{ج}|$

(iv) $\underline{ج}^٢$

الحل:

$$\underline{ج} + \underline{ج} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ \\ ١٠ & -٤ \end{pmatrix}$$

$$- ٥ \underline{ج} = - ٥ \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -١٠ & -١٥ \\ -١٥ & ١٠ \end{pmatrix}$$

$$|٣ ج| = \begin{vmatrix} ٣ \times ٢ & ٣ \times ٣ \\ ٣ \times ٥ & ٣ \times -٢ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ٦ & ٩ \\ ١٥ & ١٠ \end{vmatrix}$$

$$= (٦)(-٦) - (٩)(١٥)$$

$$= -٣٦ - ١٣٥ = -١٧١$$

$$ج^٢ = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٥ & -٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ + ١٥ & ٦ - ٦ \\ ١٠ - ١٠ & ١٥ + ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ١٩ & ٠ \\ ٠ & ١٩ \end{pmatrix}$$

$$=$$

مثال (١٧):

اذا كانت $\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٤ & -٣ \end{pmatrix}$

بيّن أن $\underline{أ}^٢ + ٢\underline{أ} = \begin{pmatrix} ١١ & ٠ \\ ٠ & ١١ \end{pmatrix}$

الحل:

$$أ^{٢} = \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ - & ٤ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ - & ٤ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ٦ - ٦٢ & ٨ + ١ \\ ٩ + ٨ & ١٢ - ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ - & ٩ \\ ١٧ & ٨ - \end{pmatrix}$$

$$٢ أ = ٢ \begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٣ - & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ - & ٨ \end{pmatrix}$$

الطرف الأيمن = $\begin{pmatrix} ٠ & ١١ \\ ١١ & ٠ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ & ٢ \\ ٦ - & ٨ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ٤ - & ٩ \\ ١٧ & ٨ - \end{pmatrix}$

= الطرف الأيسر.

مثال (١٨):

ما قيمة كل من أ ، ب إذا كان:

$$\begin{pmatrix} ٣ & أ & ٤ \\ ٠ & ٢ & ١ - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ١ \\ ٠ & ٣ \\ ب & ٦ - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ - \\ ٥ - & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\underset{٢ \times ٣}{س} \cdot \underset{٣ \times ٢}{ص} = \underset{٢ \times ٢}{ع}$$

الطرف الأيمن = $\begin{pmatrix} ٢٠ + صفر + ٣ب & ٤ + ٣أ - ١٨ \\ ٥- + صفر + صفر & ١- + ٦ + صفر \end{pmatrix}$

الأيمن   الأيسر

$$= \begin{pmatrix} ٣ب + ٢٠ & ٣أ - ١٤ \\ ٥ - & ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٢ & ٢ - \\ ٥ - & ٥ \end{pmatrix}$$

وبما أن المصفوفتين متساويتان فإن مدخلاتهما المتناظرة متطابقة أو متساوية.

∴ ٣أ - ١٤ = - ٢ (١) ⟵ ٣أ = ١٢ ⟵ أ = ٤

وكذلك ٣ ب + ١٠ = ٢ (٢) ⟵ ٣ب = - ١٨ ⟵ ب = - ٦

∴ أ = ٤

∴ ب = - ٦

مثال (١٩):

اكتب مصفوفة المعاملات ومصفوفة الثوابت والمصفوفة الموسعة للنظام:

س + ٢ ص − ع = ٥

٢س − ص + ٢ ع = ١

ص + ع = صفر

مصفوفة المعاملات: $\frac{أ}{٣ \times ٣} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & -١ \\ ٢ & -١ & ٢ \\ ٠ & ١ & ١ \end{pmatrix}$

مصفوفة الثوابت: $\frac{ب}{٣ \times ١} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ١ \\ ٠ \end{pmatrix}$

المصفوفة الموسعة: $\underline{جـ} \left(\begin{array}{ccc|c} ١ & ٢ & -١ & ٥ \\ ٢ & -١ & ٢ & ١ \\ ٠ & ١ & ١ & ٠ \end{array}\right)$

مثال (٢٠):

اكتب قيمة كل من المدخلات التالية $جـ_{١١}$ ، $جـ_{٢٢}$ ، $جـ_{٢٣}$ ، $جـ_{١٣}$

عندما $\underline{جـ} = \begin{pmatrix} ٣ & ١ & ٠ \\ ٢ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -١ & -٢ & -٣ \\ ٥ & ٠ & ٧ \end{pmatrix}$

الحل:

$$\underline{ج} = \begin{pmatrix} ٣-(-١) & ١-(-٢) & ٠-(-٣) \\ ٢-٥ & ٥-٠ & ٤-٧ \end{pmatrix}$$

$$\underset{٢\times٣}{\underline{ج}} = \begin{pmatrix} ٤ & ٣ & ٣ \\ -٣ & ٥ & -٣ \end{pmatrix}$$

والآن: $ج_{١١}$ المدخلة في الصف الأول والعامود الأول = ٤

$ج_{٢٢}$ المدخلة في الصف الثاني والعامود والثاني = ٥

$ج_{٢٣}$ المدخلة في الصف الثاني والعامود الثالث = − ٣

$ج_{٣٢}$ المدخلة في الصف الثالث والعامود الثاني = ϕ

(حيث لا يوجد صف ثالث في المصفوفة $\underline{ج}$)

(٧ - ٧) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) أوجد محددة المصفوفة $\underset{٣ \times ٣}{أ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٢ & ١ & ٣ \\ ١ & ٣ & ٢ \end{pmatrix}$

(٢) أوجد ناتج جمع $\begin{pmatrix} ٥ & ٢ \\ ٣ & -٧ \\ ١ & ٤ \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -١ & ٣ \\ ٥ & ٢ \\ -٥ & ٢ \end{pmatrix}$

(٣) حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} س & ص \\ ع & ل \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٠,٧ & -٠,٢ \\ ٠,٤ & ٠,٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٠ \\ ٠ & ١ \end{pmatrix}$$

(٤) اكتب النظير الضربي للمصفوفة:

$$\underset{٢ \times ٢}{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -١ \\ ٦ & ٥ \end{pmatrix}$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{٥}{٢١} & \frac{١}{٢١} \\ \frac{-٦}{٢١} & \frac{٣}{٢٢} \end{pmatrix} \right\}$$

(٥) حل المعادلة المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} س & ٢ \\ -١ & ص \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٣ \\ ٢ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١ \\ ٥ \end{pmatrix}$$

(٦) اذا كانت $\underset{٢ \times ٢}{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & -٤ \\ ١ & -١ \end{pmatrix}$

بيّن أن $\underset{٢ \times ٢}{أ^٢} - \underset{٢ \times ٢}{٢أ} + \underset{٢ \times ٢}{و} = \underset{٢ \times ٢}{هـ}$

حيث $\underset{٢ \times ٢}{و}$ مصفوفة الوحدة ، $\underset{٢ \times ٢}{هـ}$ المصفوفة الصفرية

(٧) أجرِ عمليات الضرب التالية إذا كانت ممكنة:

(١) $\begin{pmatrix} ٣- & ٢ \\ ٦- & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٤ & ١٠ \\ ٦ & ١٥ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ ٤ & ٥ & ٦ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$ { غير ممكنة }

(٣) $\begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ ٣ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ١ & ٢ & ٥ \\ ٠ & ٣ & ٤ \end{pmatrix}$

(٨) أوجد حاصل ضرب $\begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٥ & ٠ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٤ & ٠ \end{pmatrix}$ $\left\{ \begin{pmatrix} ٠ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \right\}$

(٩) باستخدام طريقة كريمر لحل المعادلات الخطية، ما قيمة كل من س ، ص فيما يلي؟

(١) $\frac{١}{س} + \frac{١}{ص} = ٥$

(٢) $\frac{٢}{س} - \frac{٣}{ص} =$ صفر

{ ارشاد: افرض $\frac{١}{س} =$ أ ، $\frac{١}{ص} =$ ب }

$\{ (\frac{١}{٣} ، \frac{١}{٣}) \}$

(١٠) أوجد مجموعة الحل للنظام بالمحددات (طريقة كريمر):

س + ٢ ص = ٤

س − ٤ ص + ع = ١

٢ س + ص − ٣ ع = صفر

$\{ (\frac{٥٠}{٢١} ، \frac{١٧}{٢١} ، \frac{١٣}{٢١}) \}$

(١١) أوجد حاصل ضرب المحددين:

$$\begin{vmatrix} ٣ & ٨ \\ ٢ & ٩ \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} ٥ & ٢ \\ ٧ & ٣ \end{vmatrix}$$

{ ١١ }

(١٢) اذا كانت $\underset{٢\times٢}{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٣ \\ ٢- & ٤ \end{pmatrix}$ ، $\underset{٢\times٢}{ب} = \begin{pmatrix} ٢ & ٦ \\ ٢- & ٤- \end{pmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ − ب ، أ • ب

(١٣) ما مساحة المثلث الذي رؤوسه أ (١ ، ٣) ، ب (٠٢ - ٥) ، جـ (- ٨ ، ٤)

{ ٣٥,٥ وحدة مساحة }

(١٤) أوجد مجموعة الحل للنظام ٥ س - ٢ ص + ١٤ = صفر

س + ٤ ص - ٣٢ = صفر

بطرق مختلفة كالمحددات والحذف والتعويض...

$\{ (\frac{٤}{١١} ، \frac{٨٧}{١١}) \}$

(١٥) ما قيمة س ، ص اذا كانت:

$$\begin{pmatrix} ٢ & - & ٣ \\ ٤ & ١ & - \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} س \\ ١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ \\ ص \end{pmatrix}$$

{ ٣ ، ٠ }

(١٦) اذا كانت $\underset{٣\times٣}{أ} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ & ٢ \\ ١ & ٣ & ٤ \\ ٦- & ٩ & ٨- \end{pmatrix}$

فما قيمة كل من المدخلات التالية:

$أ_{١١}$ ، $أ_{١٢}$ ، $أ_{٢١}$ ، $أ_{٢٢}$ ، $أ_{٣٣}$

{ ٢ ، ٤ ، ٧ ، ١ ، - ٦ }

(١٧) حل المعادلات المصفوفية التالية:

(١) $\begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ١ - س \\ ٨ & ٢ص + ١ & ٤ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٧ & ٣ & ٥ \\ ٨ & ٧ & ٤ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٢س + ص \\ ٣س - ص \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٤ \\ ١ \end{pmatrix}$

{ - ٤ ، ٣ } ، { (١ ، ٢) }

(١٨) اذا كانت $\underset{٢ \times ٣}{أ} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١- \\ ٧ & ٦ & ٥ \end{pmatrix}$

$\underset{٢ \times ٣}{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٥ & ٤ & ٨- \end{pmatrix}$

$\underset{٢ \times ٢}{جـ} = \begin{pmatrix} ٧ & ٦- \\ ٤ & ٢ \end{pmatrix}$

أوجد أ + ب ، أ − ب ، أ • جـ ، جـ • أ ، ٥ جـ اذا كان ذلك ممكناً

(١٩) إذا كانت $\underset{٢ \times ٢}{س} = \begin{pmatrix} ٣ & ٩ \\ ٠ & ٢ \end{pmatrix}$ ، $\underset{٢ \times ٢}{ص} = \begin{pmatrix} ٤ & ١ \\ ٥ & ٢- \end{pmatrix}$

أوجد $س^٢$ ، $ص^٢$ ، $س^٢ + ص^٢$ ، $ص^٢ - س^٢$ ، ص • س ، س • ص

(٢٠) أيّ من المصفوفات التالية منفردة ولماذا؟

$\underset{٢ \times ٢}{أ} = \begin{pmatrix} ٢ & ٩ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ، $\underset{٢ \times ٢}{ب} = \begin{pmatrix} ٣ & ٣ \\ ٢ & ٢ \end{pmatrix}$ ،

$\underset{٢ \times ٢}{جـ} = \begin{pmatrix} ٥ & ٧ \\ ٦ & ٤- \end{pmatrix}$ ، $\underset{٢ \times ٢}{د} = \begin{pmatrix} \sqrt{٣} & ٥- \\ \sqrt{٣} & ٤ \end{pmatrix}$

{ المصفوفة $\underset{٢ \times ٢}{ب}$ لأن محددتها = صفر }

(٢١) بيّن أن المصفوفة $\begin{pmatrix} أ + جـ & أ + جـ & أ + جـ \\ جـ & ب & أ \\ ١ & ١ & ١ \end{pmatrix}$ منفردة

{ارشاد: محددتها = صفر}

(٢٢) اذا كانت المصفوفة $أ_{٢ \times ٢} = \begin{pmatrix} س + ٦ & ٢س \\ س & ١ \end{pmatrix}$ منفردة فما قيمة س؟

$\{ - \frac{٣}{٢} ، ٢ \}$

(٢٣) حل النظام: س + ٢ ص = ٧

٢س + ٥ ص = - ٣ بعمليات الصف البسيط

{ (٤١ ، - ١٧) }

(٢٤) أجرِ عملية ضرب كل من المصفوفتين إذا كان ذلك ممكناً.

(١) $\begin{pmatrix} ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢) $\begin{pmatrix} ٣ & ٢ & ١ \\ ٦ & ٥ & ٤ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٥ & ٢ & ١ \\ ٤ & ٣ & ٠ \end{pmatrix}$

{ ارشاد: الأولى ممكن والثانية لا }

(٢٥) محل تجاري يبيع ثلاجات وتلفزيونات، باع في الأسبوع الأول من عام ٢٠٠٥م ثلاث ثلاجات وأربعة تلفزيونات، وفي الأسبوع الثاني باع أربع ثلاجات وخمسة تلفزيونات، وفي الأسبوع الثالث باع ٧ تلفزيونات، وفي الأسبوع الرابع باع ثماني ثلاجات. رتب هذه المعلومات في مصفوفة.

{ ارشاد: هناك مصفوفتان لترتيب هذه المعلومات }

(٢٦) ما عدد مدخلات كل من المصفوفات:

$\underline{أ} = \begin{pmatrix} ٤ & ٦ & -٢ \\ ٥ & ٣ & -١ \end{pmatrix}$ ، $\underline{ب} = \begin{pmatrix} ٤ & ٥ \\ ٣ & ٦ \\ ٠ & -٧ \end{pmatrix}$ ، $\underline{جـ} = \begin{pmatrix} ١ & ٢ \\ -٢ & ٠ \end{pmatrix}$

(٢٧) حل المعادلة المصفوفية الآتية:

$\begin{pmatrix} ٣س + ص & ٤ \\ ١ & ص + ٥ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ١٤ & ٤ \\ ١ & ٧ \end{pmatrix}$ { ٤ ، ٢ }

(٢٨) اذا كانت المصفوفة ب = $\begin{bmatrix} ٥ & ١٢ & ٨ & ١٠ \end{bmatrix}$ تمثل أثمان بيع كل وحدة من أربع سلع متمثلة بالدنانير، فإذا ارتفعت تكاليف انتاج الوحدة من كل سلعة حسب مدخلات المصفوفة جـ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٤ & ٤ & ٥ \end{bmatrix}$ اكتب المصفوفة التي تمثل أثمان البيع الجديدة لهذه السلع.

{ ارشاد : ارتفاع تكاليف الانتاج ينعكس على اثمان البيع }

(٢٩) اذا كانت أ = $\begin{pmatrix} ٢ & -١ \\ ٣ & -٤ \end{pmatrix}$ ما قيمة $|أ|$ ، $(|أ|)^{٢}$ ، $(|أ|)^{٣}$

واذا كانت ب = $\begin{pmatrix} -٧ & ٦ & ١ \\ -٨ & ٥ & ٢ \\ -٩ & ٤ & ٣ \end{pmatrix}$ ما قيمة $|ب|$، $(|ب|)^{٢}$ ، $(|ب|)^{٣}$

(٣٠) ما قيم أ في المصفوفة م = $\begin{pmatrix} ١ & أ-٢ \\ أ-٤ & ٣ \end{pmatrix}$ اذا كان $|م|$ = صفر

(٣١) اذا كانت أ = $\begin{bmatrix} ٦ & ٥ & ٤ \end{bmatrix}$ ، ب = $\begin{bmatrix} ٢ \\ ٣ \\ -١ \end{bmatrix}$ أوجد: أ • ب ، ب • أ

(٣٢) حل أنظمة المعادلات الخطية التالية بعمليات الصف البسيط أو بطريقة كريمر.

(١) ٢ س + ص = - ٢ (٢) ٣ س + ٢ ص = $\frac{١}{٢}$

- ٥ س - ٣ ص = ٣ ٧ س - ٤ ص = $\frac{١١}{٢}$

(٣٣) ما قيم ك في المصفوفة أ = $\begin{pmatrix} ك & ك \\ ٢ك & ٤ \end{pmatrix}$ المنفردة؟

{ ٠ ، ٢ }

(٣٤) احسب قيمة كل من المحددات:

$$(١)\quad \begin{vmatrix} -٢ & -١ & -٣ \\ -١ & ٤ & ٦ \\ ١ & ٥ & ٩ \end{vmatrix}$$

$$(٢)\quad \begin{vmatrix} ١ & ٢ & ٣ \\ -١ & ٣ & ٤ \\ ٢ & ٥ & ٢ \end{vmatrix}$$

{ صفر ، - ٢٧ }

(٣٥) حل المعادلتين ٢ س + ٣ ص = ٨

٧ س - ٥ ص = - ٣ بالمحددات.

{ (١ ، ٢) }

(٣٦) حل المعادلات الثلاث:

٣ س + ٤ ص + ٢ ع = ٥

٥ س - ٦ ص - ٤ ع = - ٣

- ٤ س + ٥ ص + ٣ ع = ١ بالمحددات

{ (١ ، - ٢ ، ٥) }

(٣٧) اذا كانت $\underset{١ \times ٢}{أ} = \begin{bmatrix} -٣ ، ٢ \end{bmatrix}$ ، $\underset{٢ \times ١}{ب} = \begin{bmatrix} -٢ \\ ٤ \end{bmatrix}$

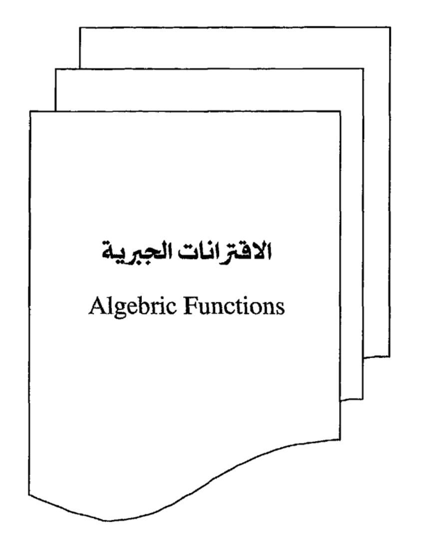
أوجد أ • ب ، ب • أ اذا كان ذلك ممكناً.

(٣٨) حل المعادلة المصفوفية:

$$\begin{pmatrix} س & ١ \\ -٢ & ٣ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ٣ \\ -١ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ٥ \\ ص \end{pmatrix}$$

(٣٩) أوجد حاصل ضرب:

$$\begin{pmatrix} ٤ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ٥ & ٠ \\ ٠ & ٠ \end{pmatrix}$$



الاقترانات الجبرية

Algebraic Functions

(٨ - ١) الأنماط Patterns

الأنماط ومفردها نمط والنمط هو النسق أو المنوال أو الأسلوب الذي نسير بمقتضاه في انجاز معظم أعمالنا اليومية، فالجميع منا نحن البشر بالذات يأكل ويشرب وينام ويكتب في بعض الأحيان، فعمليات الأكل والشرب والنوم والكتابة جميعها بلا استثناء تسير على أنماط، وكأنها مؤثرات على سريان الحياة في أجسامنا كونها تنفي عنا جمود الفناء، هذا من ناحية عامة.

أما في الرياضيات فالأنماط هي الموضوعات الرياضية الهامة لأنها تسير بطرق يمكن تحديدها بقواعد رياضية ليسهل علينا التعامل معها وتفسيرها بأسلوب صحيح كونها تكشف لنا علاقات الربط بين المتغيرات وما ينتج عنها من قوانين واقترانات.

مثال:

إذا حددت ادارة المرور في احدى البلدان أجرة الراكب في الحافلات العمومية المنتشرة هناك من خلال عداد الحافلة، بحيث تبدأ دورة العداد بـ ٢٥ قرشاً عند ركوب الشخص في الحافلة، ويضاف بعد ذلك ١٥ قرشاً لقاء كل كيلومتر واحد تقطعه الحافلة بانتظام.

من هذه المعلومات يمكن التعرف على مقدار أجرة الراكب وفق الجدول التالي، كون القاعدة تسير على نمط وحيد هو:

المسافة المقطوعة بالكيلومتر	اجرة الراكب بالقروش
١	٢٥ + ١ (١٥) = ٤٠ قرشاً
٢	٢٥ + ٢ (١٥) = ٥٥ قرشاً
٣	٢٥ + ٣ (١٥) = ٧٠ قرشاً
⋮	
س	٢٥ + س (١٥) = ٢٥ + ١٥ س قرشاً

وهذه هي القاعدة الناتجة عن النمط السابق.

وكأن الأنماط تؤول في نهايتها الى علاقات بين المتغيرات. وهنا وفي هذا السؤال بالذات؛ هناك علاقة بين المسافة المقطوعة بالكيلومترات وأجرة الراكب بالقروش، اكتشفت بنتيجة النمط السابق.

لذا فالأنماط تنتج من القواعد ما نطلق عليها "الاقترانات"

فالنمط السابق أنتج الاقتران التالي:

ق (س) = ٢٥ + ١٥ س

حيث: س عدد الكيلومترات المقطوعة

ق (س) قيمة الأجرة المدفوعة.

فأجرة الراكب على سبيل المثال عندما يقطع ٧ كيلومترات بالحافلة نفسها هي:

ق (٧) = ٢٥ + ٧ (١٥) = ٢٥ + ١٠٥ = ١٣٠ قرشاً.

وهكذا....

(٨- ٢) الاقتران الجبري Algebric Function:

الاقترانات الجبرية التي نحن بصدد مناقشتها الآن، تُعتبر ركيزة أساسية من ركائز الرياضيات كونها المادة الخام لموضوعات متعددة وهامة في الرياضيات كالمتتاليات والمتسلسلات والتفاضل والتكامل وغيرها من الموضوعات، كما سيتضح فيما بعد، وفي هذا المؤلف بالذات.

من المعروف أن الاقتران علاقة بين عناصر مجموعتين، يرتبط فيها كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى تُسمى (المجال Domain) بعنصر واحد فقط من عناصر المجموعة الثانية تُسمى (المدى Range).

والاقترانات التي مجالها ومداها مجموعات جزئية من الأعداد الحقيقية ح يطلق عليها اسم الاقترانات الحقيقية Real Functions، والاقترانات الجبرية ما هي إلا

قسمٌ هام جداً من أقسام الاقترانات الحقيقية بموجب التقسيم التالي:

الاقترانات

الاقترانات الجبرية　　　الاقترانات المتسامية (غير الجبرية)

والاقترانات الجبرية هي الاقترانات التي ترتبط فيها المتغيرات (س ، ص) مثلاً بعلاقة تتمثل بقاعدة هي: ص = ق (س)

حيث س يُسمى المتغير المستقل ، ص يسمى المتغير التابع

وتضم الاقترانات الجبرية الأنواع التالية من الاقترانات:

كثيرات الحدود

اقترانات القيمة المطلقة

اقتران أكبر عدد صحيح أو الدرجي أو السُلّمي

اقترانات نسبية

اقترانات مجذورة

وسنُناقش جميع هذه الأنواع في هذا الفصل بالذات.

وأما الاقترانات المتسامية أو غير الجبرية فتضم الأنواع التالية من الاقترانات:

الاقترانات الدائرية: وهي التي ترتبط بالزوايا ارتباطاً وثيقاً

والاقترانات الأسية: وعلى وجه الخصوص الاقترانات الأسية الطبيعية للأساس هـ (العدد النابييري فقاعدته ق (س) = $هـ^{س}$

والاقترانات اللوغارتمية: وعلى وجه الخصوص الاقترانات اللوغارتمية الطبيعية للأساس هـ (العدد النابييري) وقاعدته ق (س) = $لو_{هـ}$ س

وسنناقشها في أماكنها من هذا المؤلف، لذا وجب التنويه.

(٨ - ٣) أنواع الاقترانات الجبرية Types of Algebra Functions:

(i) كثيرات الحدود Polynomial Functions:

كثيرات الحدود مجموعة من الاقترانات الحقيقية الجبرية والتي تشترك جميعها بالصورة العامة الواحدة للقاعدة التالية:

$$ق(س) = أ_{ن} س^{ن} + أ_{ن-١} س^{ن-١} + أ_{ن-٢} س^{ن-٢} + \cdots + أ_{١} س + أ_{٠}.$$

لكل ن عدد صحيح غير سالب (صفر وموجب)

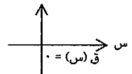
والأعداد الحقيقية $أ_{ن}$ ، $أ_{ن-١}$ ، $أ_{ن-٢}$ ، ... ، $أ_{٠}$ تسمى المعاملات Coe fficient

والقوى powers أو الأسس Indices ن ، ن- ١ ، ن - ٢ ، ... ، ١ ، ٠ تحدد درجات Degrees هذه الاقترانات.

هذا وتصنف كثيرات الحدود الى الاقترانات التالية:

× الاقتران الصفري Zero Fanction:

قاعدته ق (س) = صفر ، ومنحناه محور السينات بالذات ، ولا درجة له على الاطلاق، كما في الشكل:



× الاقتران الثابت Constant Function:

قاعدته ق (س) = جـ ، لكل جـ ∋ ح

ومنحناه يمثل مستقيماً يوازي محور السينات ويبعد عنه بمقدار جـ وحدة ومن الدرجة الصفرية كما في الشكل:

ص = ق (س)

ق (س) = جـ ∋ ح*

س

ق (س) -- جـ ∋ ح*

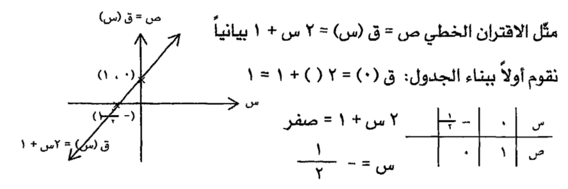
× الاقتران الخطي Linear Function:

قاعدته ق (س) = أ س + ب ، لكل أ ، ب ∋ ح ، أ ≠ صفر ومن الدرجة الأولى كون أكبر قيمة للأس فيه هو ١ صحيح ومنحناه مستقيم تمثله كما في الجدول التالي:

مثال:

مثّل الاقتران الخطي ص = ق (س) = ٢ س + ١ بيانياً

نقوم أولاً ببناء الجدول: ق (٠) = ٢ ( ) + ١ = ١



س	٠	- ١/٢
ص	١	٠

٢ س + ١ = صفر

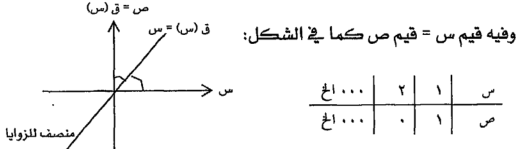
$$س = - \frac{١}{٢}$$

وكحالة خاصة من الاقتران الخطي هناك الاقتران المحايد Identity Function:

قاعدته ق (س) = س

ومنحناه يمر بنقطة الأصل،

وفيه قيم س = قيم ص كما في الشكل:



س	١	٢	... الخ
ص	١	٠	... الخ

وللاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب صفات ندونها على الصفحات التالية:

بما أن الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب ، أ ≠ صفر يمثل بيانياً على المستوى الديكارتي بخط مستقيم على الصورة:

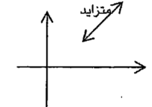
ص = م س + جـ

فإن:

(١) ميل الاقتران الخطي هو أ كونها يناظر ميل المستقيم ص = م س + جـ وهو م (هندسة تحليلية) فميل الاقتران الخطي ق (س) = ٣ س - ٤ هو ٣

وميل الاقتران الخطي هـ (س) = ٨ – ٦ س هو - ٦

(٢) اذا كان أ > صفر يكون ق (س) متزايد، أي أن قيمة الاقتران ق (س) تزداد بزيادة قيمة س



مثل: ق (س) = ٣ س + جـ ،

ق (١) = ٣ (١) + جـ = ٨

ق (٢) = ٣ (٢) + ٥ = ١١

أي أن س تزداد من ١ الى ٢ ، ق (س) تزداد أيضاً من ٨ الى ١١

(٣) وإذا كان أ < صفر يكون ق (س) متناقص، أي قيمة الاقتران ق (س) تقل بزيادة قيمة س



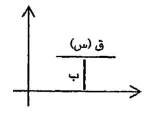
مثل: ق (س) = ٥ – ٣ س

ق (١) = ٥ – ٣ (١) = ٢

ق (٢) = ٥ – ٣ (٢) = - ١

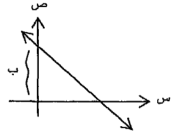
أي أن بزيادة س من ١ الى ٢ تقل قيمة الاقتران من ٢ الى - ١

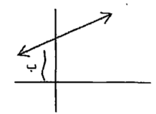
(٤) وعندما أ = صفر فالاقتران ق (س) = أ س + ب يتحول الى الاقتران الثابت ق (س) = ب ويُصبح لا متزايد ولا متناقص كما في الشكل:



(٥) والاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب فإن ب تسمى مقطعه الصادي هكذا :

حيث ص = م س + جـ أي أن ب = جـ المقطع الصادي كما في الشكلين:





فالمقطع الصادي للاقتران ق (س) = ٣ س + ٥ هو ٥

فالمقطع الصادي للاقتران هـ (س) = ٥ - ٣ س هو ٥ أيضاً

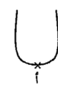
هذا وسنناقش موضوع التزايد والتناقص بالتفصيل في مكان آخر من هذا المؤلف وفي فصل "التفاضل" انشاء الله القدير!!!

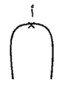
× **الاقتران التربيعي** Qudratic Function:

قاعدته ص = ق (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ لكل أ ، ب ، جـ ∋ ح ، أ ≠ صفر ومن الدرجة الثانية لأن أكبر أس للمتغير فيه هو ٢

ومنحناه يُمثل بيانياً بشكل قطع مكافئ Parabolq (سيأتي بحثه بالتفصيل في فصل القطوع المخروطية انشاء الله) ويكون منحناه مفتوح للأعلى هكذا ∪ عندما تكون اشارة أ موجبة (معامل $س^{٢}$) ومفتوح للأسفل هكذا ∩ عندما تكون اشارة أ سالبة (معامل $س^{٢}$).

وتسمى أعلى نقطة بمنحناه أو أوطأ نقطة برأس القطع المكافئ مثل:





حيث أ ($س_{١}$ ، $ص_{١}$) رأس القطع المكافئ في الشكلين.

مثال:

الاقتران ق (س) = س^{٢} + ٢ س - ٣

اقتران تربيعي من الدرجة الثانية ولرسم منحناه نعيّن احداثيات رأسه Vertex والمتمثلة بالنقطة:

($\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق $\frac{(-ب)}{٢أ}$) هكذا:

الصورة العامة لقاعدته ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

وهو ق (س) = ١ س^{٢} + ٢ س – ٣

∴ أ = ١ ، ب = ٢ ، جـ = - ٣

الاحداثي السيني للرأس = $\frac{-ب}{٢أ}$ = $\frac{-٢}{٢ \times ١}$ = - ١

والآن نقوم ببناء الجدول التالي:

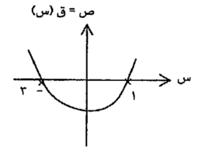
س	٣–	٢–	الرأس ١–	٠	١
ق (س)	صفر	٣–	٤–	٣–	صفر

من الملاحظ أن ق (- ٣) = ق (١) = (١)^{٢} + ٢ (١) - ٣ = صفر للتماثل المار هو ل

ق (- ٢)= ق (٠) = (٠)^{٢} + ٢ (٠) - ٣ = - ٣ الرأس.

ق (- ١) = (- ١)^{٢} + ٢ (- ١) - ٣ = ١ - ٢ - ٣ = - ٤

ومنحناه كما في الشكل



ملحوظة:

يمكن أن يكون منحنى الاقتران التربيعي – القطع المكافئ – مفتوحاً لليمين هكذا ⊂ أو لليسار ⊃ عند استبدال س بالمتغير ص

كما يلي: $س = أ ص^٢ + ب ص + جـ$ ... وحسب الاشارة أ أيضاً

فإذا كانت اشارة أ موجبة فهو مفتوح لليمين ⊂

وإذا كانت إشارة أ سالبة فهو مفتوح لليسار ⊃

هذا وسيأتي بحث ذلك بالتفصيل لاحقاً كما أسلفنا في فصل "القطوع المخروطية".

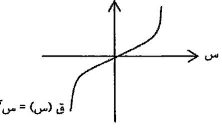
× **الاقتران التكعيبي** Cubic Function:

قاعدته $ق (س) = أ س^٣ + ب س^٢ + جـ س + د$ لكل أ ، ب ، جـ ، د ∋ ح

$أ \neq$ صفر

ومن الدرجة الثالثة لأن أكبر أس للمتغير س فيه = ٣ ومنحناه يمثل بيانياً بواحد من الشكلين ∽ أو ∽ - كما سيأتي لاحقاً-

لكن منحنى $ق (س) = س^٣$ هو



وهناك العديد من اقترانات كثيرات الحدود ذوات الدرجات المنوعة كالرابعة مثل $ق (س) = س^٤$ ، والخامسة مثل $ق (س) = س^٥$ والسادسة وغيرها ... ، ولكننا سنكتفي بما أوردناه منها فقط.

هذا ويتساوى كثيرا الحدود، اذا كانا من نفس الدرجة وكانت معاملاتهما المتناظرة متساوية كذلك مثل:

مثال:

لو نظرنا الى الاقترانين $ق (س) = (س + ٢)^٣$

$$هـ (س) = س^٣ + ٦ س^٢ + ١٢ س + ٨$$

نظرة فاحصة وسألنا أنفسنا هذا السؤال: ما العلاقة بين قاعدتي الاقترانين؟ سيكون الجواب: علينا أن نضع القاعدتين بصورة واحدة هكذا.

ق (س) = (س + ٢) (س + ٢) (س + ٢) = ($س^٢$ + ٤ س + ٤) (س + ٢)

= $س^٢$ (س + ٢) + ٤ س (س + ٢) + ٤ (س + ٢) ومن قانون التوزيع

= $س^٣$ + ٢ $س^٢$ + ٤ $س^٢$ + ٨ س + ٤ س + ٨

= $س^٣$ + ٦ $س^٢$ + ١٢ س + ٨

لكن هـ (س) = $س^٣$ + ٦ $س^٢$ + ١٢ س + ٨

∴ ق (س) ، هـ (س) اقترانان متساويان.

وبما أن مجال كثيرات الحدود دائماً الأعداد الحقيقية فإن تساوي كثيري الحدود ق (س) ، هـ (س) يتم إذا كان لها نفس الدرجة وكانت معاملات قوى س المتناظرة فيها متساوية مثل ق (س)= $س^٢$ + ٥ س + ٤ ، هـ (س) = ٥ س + ٤ + $س^٢$ وبعد وضع كلاً منها على الصورة العامة.

مثال:

اذا كان ق (س) = أ $س^٣$ + (ب — س) $س^٢$ + ٢

هـ (س) = - ٥ $س^٣$ + ٢ $س^٢$ + ٢

متساويين فما قيم كل من أ ، ب؟

بما أن ق (س) = هـ (س)

فإن المعاملات المتناظرة متساوية

أي أن أ = - ٥ معاملا $س^٣$ المتناظران

وكذلك ب - ١ = ٢ ⟵ ب = ٣

(ii) الاقتران المتشعب Piecewise Function:

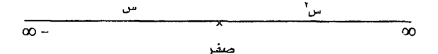
هو الاقتران الجبري الذي تتغيرقاعدته وفقاً لقيم المتغير س في مجموعات جزئية من مجالها، ولذا يكون له أكثر من قاعدة كما يلي:

مثال:

ق (س) = { س^٢ ، س ≤ صفر ← القاعدة الأولى
　　　　　س ، س > صفر ← القاعدة الثانية

هذا ويسمى العدد صفر نقطة تغيير بالتعريف.

والملاحظ أن مجال الاقتران في القاعدة الأولى هو: [٠ ، ∞ [

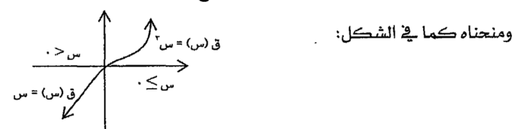


ومجال الاقتران في القاعدة الثانية هو:] - ∞ ، ٠ [

لذلك يكون مجال ق (س) هو (- ∞ ، ٠) ∪ [٠ ، ∞)

= (- ∞ ، ∞) = ح

ومنحناه كما في الشكل:



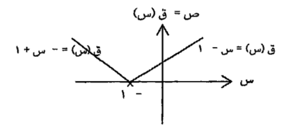
(iii) **اقتران القيمة المطلقة** Absolute value Function:

أو كما يسميه بعض الرياضيين اقتران القيمة الموجبة.

ومثاله: ق (س) = | س + ١ | ولتمثيل منحناه بيانياً يجب اعادة تعريفه ليصبح اقتران متشعب كما يلي:

ق (س) = { س + ١ ، س + ١ ≤ صفر ← { س + ١ ، س ≤ - ١
　　　　　- (س + ١) ، س + ١ > صفر 　　- س - ١ ، س > - ١

أو نجد صفره: س + ١ = صفر ← س = - ١



(iv) اقتران أكبر عدد صحيح Greater Integer Function:

أو كما يسميه البعض الاقتران الدرجي أو السلمي Step Function

قاعدته ق (س) = [س] ولتمثيل منحناه يجب اعادة تعريفه وبالشكل العام:

[ب] ← ن ≤ س > ن + ١ حيث ن عدد صحيح

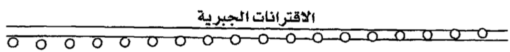
وعندها س = ن عند كل درجة من الدرجات التي تكون منحناه.

ولرسم منحنى ق (س) = [س] المعرف على الفترة [- ٢ ، ٢] نقول:

نجد طول الدرجة = $\frac{١}{|\text{معامل س}|}$ = $\frac{١}{١}$ = ١

ثم نعيد التعريف كالتالي (س(٤) ، س(٣) ، س(٢) ، س(١) على المحور: - ٢ ، - ١ ، ٠ ، ١ ، ٢) مجاله

ق (س) =
- ٢ ، - ٢ ≤ س > - ١ حيث الدائرة ٥ في الرسم
- ١ ، - ١ ≤ س > ٠ معناها أنها لا تنتمي الى
٠ ، ٠ ≤ س > ١ الاقتران مثلاً: ق(٢) = ٢
١ ، ١ ≤ س > ٢ ولا تساوي ١ اطلاقاً
٢ ، س = ٢ "من الرسم"

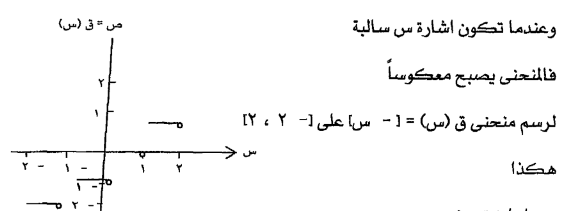


وعندما تكون اشارة س سالبة

فالمنحنى يصبح معكوساً

لرسم منحنى ق (س) = ⟦− س⟧ على [−٢ ، ٢]

هكذا



بعد اعادة تعريفه:

ق (س) =
- −٢ ، س = −٢
- −١ ، −٢ < س ≤ −١
- ٠ ، −١ < س ≤ ٠
- ١ ، ٠ < س ≤ ١
- ٢ ، ١ < س ≤ ٢

ص = ق (س)

(v) **الاقتران النسبي** Rational Function:

هو الاقتران المعرف على شكل كسر يشمل بسطاً ومقاماً.

مثال:

$ق (س) = \frac{س - ١}{س^{٢} + ١}$ ومجاله ح

ومجال الاقترن النسبي هو ح − {أصفار الاقتران ، أصفار مقامه}

مثلاً:

مجال الاقتران $ق (س) = \frac{١}{س}$ هو ح − {٠}

ويكتب هكذا: $ق (س) = \frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر

ومجال ق (س) = $\frac{١}{\text{س} - ١}$ ، بعد أن نجد أصفار الاقتران، الصفر مقامه

س - ١ = صفر

س = ١ صفر الاقتران

∴ مجال ق (س) = $\frac{١}{\text{س} - ١}$ ، س ≠ ١ وهكذا..

(vi) × الاقتران المجذور وبالتحديد:

- اقتران الجذر التربيعي Square Root Function:

مثال:

ق (س) = $\sqrt[٢]{\text{س}}$ ، دليله ٢ ، ومجاله س ≥ صفر

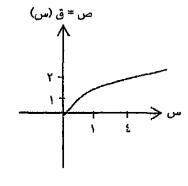
أي مجاله الأعداد الحقيقية الموجبة والصفر أيضاً.

حيث الأعداد السالبة ليس لها جذر تربيعي حقيقي بل ركب –لسنا بصدده الآن– ومداه الصفر والأعداد الموجبة فقط.

مثال:

ارسم منحنى الاقتران ق (س) = $\sqrt{\text{س}}$

س	٠	١	٤
ق(س)	١-	٠	٢



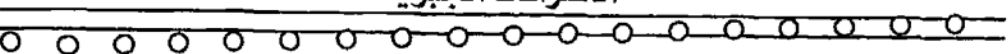
ق (٠) = $\sqrt{٠}$ = صفر

ق (١) = $\sqrt{١}$ = ١

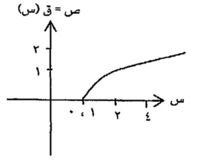
ق (٤) = $\sqrt{٤}$ = ٢

ومجال الاقتران ق (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$ هو س - ١ ≥ صفر

أي س ≥ ١



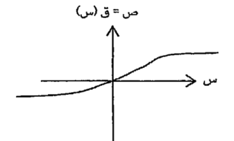
ومنحناه:



× **اقتران الجذر التكعيبي Cubic Root Runction:**

مثال:

ق (س) = $\sqrt[3]{س}$ دليله ٣ مجاله ح حيث العدد السالب = الموجب والصفر كلاهما لهما جذر تكعيبي.



ومنحناه

س	١-	٠	١
ق(س)	١-	٠	١

وأخيراً لا تنسى أن $\sqrt[3]{س^{٢}}$ = | س | لذا تنفي التنويه

ويشكل عام مجال الاقتران ق (س) = $\sqrt[ن]{س}$ هو

× س ≥ صفر عندما ن زوجي مثل $\sqrt[٢]{س}$، $\sqrt[٤]{س}$، $\sqrt[٦]{س}$، ...

× ح عندما ن فردي مثل $\sqrt[٣]{س}$، $\sqrt[٥]{س}$، $\sqrt[٧]{س}$، ...

(٨- ٤) اشارة الاقتران الجبري Sign of Algebraic:

نظراً لأهمية اشارة الاقتران عند تعيين مجاله وتمثيله البياني بشكل عام فإننا سنبحث اشارة الاقترانات من حيث هي موجبة أو سالبة أو كليهما كما يلي:

- اشارة الاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب ، نجد صفره.

وصفره يسمى العدد الحرج وهو العدد الذي عنده يغير الاقتران من اشارته:

أ س + ب = صفر ⟵ أ س = - ب ⟵ س = $\frac{-ب}{أ}$ صفر أو عدده الحرج

فتكون اشارته

نفس اشارة أ عندما س > $\frac{-ب}{أ}$ أو تعويض بعدد أكبر من صفر أو العدد الحرج الاقتران

عكس اشارة أ عندما س < $\frac{-ب}{أ}$ أو تعويض بعدد أصغر من صفر العدد الحرج الاقتران

مثال:

أوجد اشارة ق (س) = ٢ س - ٤

٢ س - ٤ = صفر س = ٢ صفر الاقتران

أو نعوض العدد ٥ أكبر من صفر الاقتران

ق (٥) = ٢ (٥) - ٤ = ١٠ - ٤ = ٦ موجب كما في الشكل

وكذلك نعوض ٠ أصغر من صفر الاقتران

ق (٠) = ٢ (٠) - ٤ = - ٤ سالب كما في الشكل.

مثال:

أوجد اشارة ق (س) = ٩ - ٣ س

٩ - ٣ س = صفر ⟵ س = ٣

أو التعويض بالعددين:

ق (٥) = ٩ - ٣ (٥) = ٩ - ١٥ = - ٦ سالب

ق (٠) ٩ - ٣ (٠) = ٩ موجب

~ اشارة الاقتران التربيعي ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

وتعتمد اشارته على قيمه مميزة ب^{٢} − ٤ أ جـ

فإذا كان ب^{٢} − ٤ أ جـ > صفر له صفران

وإشارته تكون كما يلي:

نفس اشارة أ ، مخالفة الاشارة أ ، نفس اشارة أ

∞ − ، س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، ∞

مثال:

ما اشارة ق (س) = س^{٢} − ٥ س + ٦

أ = ١

ب = − ٥

جـ = ٦

ب^{٢} − ٤ أ جـ = (− ٥)^{٢} − ٤ × ١ × ٦ = ١ موجب

س^{٢} − ٥س + ٦ = صفر

(س − ٢) (س − ٣) = صفر

س$_{١}$ = ٢ ، س$_{٢}$ = ٣ الجذران

نفس اشارة أ ، مخالفة الاشارة أ ، نفس اشارة أ

∞ − +++ ٢ − − − ٣ +++ ∞

وإذا كان ب^{٢} − ٤ أجـ = صفر له صفر مكرر وكأنه واحد، وتكون اشارته نفس اشارة أ إلا عند صفره فلا قيمة له.

مثال:

ما اشارة ق (س) = س^{٢} − ٤س + ٤

أ = ١

ب = − ٤

جـ = ٤

ب^{٢} − ٤ أ جـ = (− ٤)٢ − ٤ × ١ × ٤ = صفر

فإشارته نفس اشارة أ وهي موجبة

وإذا كان $ب^2 - 4$ أ جـ $<$ صفر فإشارته نفس اشارة أ كونه لا أصفار حقيقية له

مثال:

ما اشارة ق(س) = $س^2 + 2$ س + 5 أ = 1

ب = 2

جـ = 5

$ب^2 - 4$ أ جـ = $(2)^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 <$ صفر فدائماً موجب

أما بقية كثيرات الحدود فإننا نقسمها بالضرب الى اقترانات خطية وتربيعية بواسطة التحليل ثم نضرب الاشارات كما يلي:

ما اشارة ق (س) = $س^3 - 1$

$س^3 - 1 = (س - 1)(س^2 + س + 1)$

س − 1 = صفر اشارة س − 1

س = 1

اشارة $س^2 + س + 1$

وبالضرب اشارة $س^3 - 1$

~ اشارة الاقتران النسبي: نجد اشارة البسط واشارة المقام ونجري عملية قسمة الاشارات كضربها بالتمام.

مثال:

ما اشارة ق (س) = $\frac{س - 3}{2س - 5}$ ، س $\neq \frac{5}{2}$

اشارة البسط

اشارة المقام

اشارة ق (ر)

وهكذا فإننا نعتمد على اشارة الاقترانات الخطية والتربيعية في ايجاد اشارة الاقترانات النسبية وكثيرات الحدود الأخرى بواسطة التحليل الى العوامل.

× **قيمة الاقتران الجبري** Value Of Function:

سأناقش فيما يلي كيفية ايجاد قيمة الاقتران عند أي نقطة في مجاله، وبطريقة التعويض المباشر دون تبسيط أو اختصار على الاطلاق، هذا إذا علمت قيمة المتغير فيه وعلم مجاله ايضاً.

ومجال كثيرات الحدود دائماً الأعداد الحقيقية أو مجموعة جزئية منها إلا إذا عُرِّفت على فترات أو مجموعات مخالفة وتكون معرفة عندما س، ∋ ح

مثال:

إذا كان ق (س) = س^{٢} − ٥ س + ٤

أوجد ق (− ١) ، ق (صفر) ، ق (١) أي قيمة الاقتران عندما س = − ١ ، صفر ، ١

ق (− ١) = (− ١)^{٢} − ٥ (+ ١) + ٤ = ١٠

ق (٠) = (٠)^{٢} − ٥ (٠) + ٤ = ٤

ق (١) = (١)^{٢} − ٥ (١) + ٤ = صفر

وعند ايجاد القيمة العددية للاقتران عند أي نقطة يجب أن تنتمي هذه النقطة الى مجاله، لذا يجب معرفة المجال أولاً ثم القيمة كما في الأمثلة التالية:

~ كثيرات الحدود معرفة لكل س، ∋ ح أي أن مجالها ح دائماً إلا إذا عرفت بطريقة تُخرج بعض النقط من مجالها.

~ الاقترانات النسبية معرفة شرط أن المقام ≠ صفر لذا فللاقتران قيمة عددية دائماً إلا عند أصفار مقامه كما يلي:

اذا كان ق (س) = $\frac{\text{س}^{٢}}{\text{س} - ٤}$ فإن مجاله ح − {٤}

~ الاقترانات التي تحتوي جذراً دليله زوجي كالجذر التربيعي مثلاً ما بداخل الجذر يجب أن يكون موجباً أو صفراً ولا يساوي كمية سالبة.

فمجاله: داخل الجذر ≤ صفر

مثال:

اذا كان ق (س) = $\sqrt{س - ٢}$

المجال: س - ٣ ≤ صفر ⟵ س ≤ ٣

أي أن مجاله س ≤ ٣ أو بشكل فترة [٣ ، ∞)

إذ لا جذر حقيقي دليله زوجي لكمية سالبة.

والتفسير: $\sqrt{١}$ = ١ ، $\sqrt{-١}$ ليس عدد حقيقي بل مركب كما سيأتي.

أما الاقتران الذي يحتوي جذراً دليله فردي فمجاله دائماً ح الأعداد الحقيقية مثل الجذر التكعيبي، إذ يوجد جذر حقيقي يجمع الأدلة الفردية.

مثال:

اذا كان ق (س) = $\sqrt[٣]{س ، ٣}$ فمجاله ح كون س − ٣ ∋ ح

(٨- ٦) جبر الاقترانات:

أو كيفية اجراء العمليات الخمس التالية:

الجمع (مجموع)	The Sum
الطرح (الفرق)	The Diggerence
الضرب	The Product
القسمة	The Quotient
التركيب	The Combining

على الاقترانات الجبرية

وبعد اجراء العمليات السابقة يجب تحديد مجالات هذه الاقترانات الناتجة عن تلك العمليات.

(i) يُعرَّف مجموع الاقترانين ق (س) ، هـ (س) بأنه (ق + هـ)(س) أو (هـ + ق)(س) الذي تكون صورة كل عنصر (س) في مجاله مساوية لمجموع صورتي (س) في الاقترانين المذكورين.

مثال:

اذا كان ق (س) = $س^{٢}$ ، هـ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

فإن ق (س) + هـ (س) = (ق + هـ) (س) = $\frac{س^{٢}}{١} + \frac{١}{س - ١} = \frac{س^{٢}(س - ١) + ١}{س - ١}$

= $\frac{س^{٣} - س^{٢} + ١}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

وكذلك هـ (س) + ق (س) = (هـ + ق) (س) = $\frac{١}{س - ١} + \frac{س^{٢}}{١} = \frac{١ + س^{٣} - س^{٢}}{س - ١}$

= $\frac{س^{٣} - س^{٢} + ١}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

ولما كان (ق + هـ) (س) = (هـ + ق) (س)

فالضرب تبديلي

وللتحقق:

(ق + هـ) (٢) = $\frac{(٢)^{٣} - (٢)^{٢} + ١}{٢ - ١} = \frac{٨ - ٤ + ١}{١} = ٥$

و (هـ + ق) (٢) = $\frac{(٢)^{٣} - (٢)^{٢} + ١}{٢ - ١} = \frac{٨ - ٤ + ١}{١} = ٥$

× ويُعرّف الفرق بين الاقترانين ق (س)، هـ (س) بأنه (ق − هـ)(س) أو (هـ − ق)(س) الذي تكون فيه صورة كل عنصر (س) في مجاله مساوية للفرق بين صورتي (س) في الاقترانين المذكورين.

مثال:

اذا كان ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

فإن ق (س) – هـ (س) = (ق – هـ)(س) = $\frac{س^{٢}}{١} - \frac{١}{س - ١} = \frac{س^{٢}(س - ١) - ١}{س - ١}$

= $\frac{س^{٣} - س^{٢} - ١}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

وكذلك هـ (س) – ق(س) = (هـ - ق)(س) = $\frac{١}{س - ١} - \frac{س^{٢}}{١} = \frac{١ - س^{٢}(س - ١)}{س - ١}$

= $\frac{١ - س^{٣} - س^{٢}}{س - ١} = \frac{١ + س^{٢} - س^{٣}}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

ولما كان (ق - هـ) (س) $\neq$ (هـ - ق)(س)

فالطرح غير تبديلي

وللتحقق:

(ق – هـ)(٢) = $\frac{(٢)^{٣} - (٢)^{٢} - ١}{٢ - ١} = \frac{٨ - ٤ - ١}{١} = ٣$

و (هـ - ق)(٢) = $\frac{١ + (٢)^{٢} - (٢)^{٣}}{٢ - ١} = \frac{١ + ٤ - ٨}{١} = - ٣$

× يُعرّف حاصل ضرب الاقترانين ق(س) ، هـ (س) بأنه (ق . هـ) (س) أو (هـ - ق)(س) الذي تكون فيه صورة كل عنصر (س) في مجاله مساوية لحاصل ضرب صورتي (س) في الاقترانين المذكورين.

فإن إذا كان ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

ق (س) · هـ(س) = (ق · هـ)(س) = (س^{٢}) ($\frac{١}{س - ١}$) = $\frac{س^{٢}}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

وكذلك هـ(س) · ق(س) = (هـ- ق)(س) = ($\frac{١}{س - ١}$)(س^{٢}) = $\frac{س^{٢}}{س - ١}$ ، س $\neq$ ١

ولما كان (ق · هـ) (س) = (هـ - ق) (س)

فالضرب تبديلي

وللتحقق (ق ∘ هـ) (٢) = (($(٢)^٢$) ($\frac{١}{٢ - ١}$)) = (٤) (١) = ٤

و (هـ ∘ ق) (٢) = ($\frac{١}{٢ - ١}$) $(٢)^٢$ = (١) (٤) = ٤

× يُعرّف خارج قسمة الاقترانين ق (س) ، هـ(س) كل منهما على الآخر كما يلي:

$\frac{ق (س)}{هـ (س)}$ = ($\frac{ق}{هـ}$) (س) ، هـ (س) ≠ صفر

ومجاله ، مجال ق (س) ∧ مجال هـ(س) — { أصفار و (س) }

أو $\frac{هـ (س)}{ق(س)}$ = ($\frac{هـ}{ق}$)(س) ، ق (س) ≠ صفر

ومجاله ، مجال هـ (س) ∧ مجال ق (س) — {أصفار ق (س) }

اذا كان ق (س) = $س^٢$ ، هـ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

فإن $\frac{ق (س)}{هـ (س)}$ =($\frac{ق}{هـ}$) (س) = $س^٢$ ÷ $\frac{١}{س - ١}$ = ($س^٢$) ($\frac{س - ١}{١}$)

= $س^٣$ — $س^٢$ ، س ≠ ١ ومجاله ح — { ١ }

وكذلك $\frac{هـ (س)}{ق(س)}$ = ($\frac{هـ}{ق}$) (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ÷ $س^٢$

= ($\frac{١}{س - ١}$) ($\frac{١}{س^٢}$) = $\frac{١}{س^٣ — س^٢}$

مجاله: $س^٣$ — $س^٢$ ≠ صفر

$س^٢$ ($س^١$ - ١) ≠ صفر

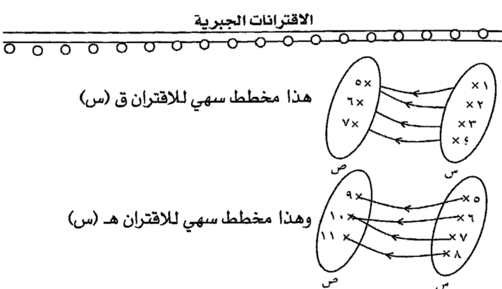
س (س - ١) ≠ صفر

س { ٠ ، ١ }

ومجاله: ح — { ٠ ، ١}

وفي هذا السياق سنوضح بالتفصيل عملية تركيب الاقترانات كما يلي:

من المعلوم أن الاقتران هو ارتباط بين عناصر مجموعتين بحيث يرتبط كل عنصر في مجاله بصفر واحد وواحد فقط في مداه هكذا:



من المخططين السهنينين السابقين يمكن تكوين اقران جديد على النحو:

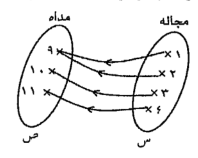
١ ⟵ق (س)⟵ ٥ ⟵هـ (س)⟵ ٩ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق(١) = ٩

٢ ⟵ق (س)⟵ ٥ ⟵هـ (س)⟵ ٩ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق(٢) = ٩

٣ ⟵ق (س)⟵ ٦ ⟵هـ (س)⟵ ١٠ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق(٣) = ١٠

٤ ⟵ق (س)⟵ ٧ ⟵هـ (س)⟵ ١١ ويرمز لهذه العملية بالرمز هـ (ق(٧) = ١١

وبهذه العملية قد عرّفنا اقتران جديد يسمى اقتران مركب من ق (س) ، هـ (س)
ويرمز له بالرمز (هـ ٥ ق) (س)



ويقرأ الاقتران الركب الجديد هكذا:

هـ لِ ق (س) = هـ (ق (س)) = (هـ ٥ ق) (س)

والآن سنقوم بعملية تركيب الاقترانات ميكانيكياً كما يلي:

اذا كان ق (س) = س^{٢} ، هـ (س) = $\frac{١}{س - ١}$ ، س ≠ ١

فإن (ق ٥ هـ) (س) وتُقرأ (ق بعد هـ) (س)

$= ق (هـ (س)) = ق (\frac{1}{س - 1}) = (\frac{1}{س - 1})^{2} = \frac{1}{س^{2} - 2س + 1}$ ، $س \neq 1$

وكذلك $(هـ \circ ق)(س) = هـ (ق (س)) = هـ (س^{2})$

$= \frac{1}{س^{2} - 1}$ ، $س \neq \pm 1$

وبما أن $(ق \circ هـ)(س) \neq (هـ \circ ق)(س)$ وكما هو واضح في المثال:

كون $(هـ \circ ق)(2) = \frac{1}{(2)^{2} - 1} = \frac{1}{4 - 1} = \frac{1}{3}$

وكذلك $(هـ \circ ق)(2) = ق (هـ (2)) = ق (\frac{1}{4 - 1}) = ق (1) = (1)^{2} = 1$

هذا ويمكن ايجاد قيم المتغير س بمعرفة $(ق \circ هـ)(س)$ ، أو $(هـ \circ ق)(س)$

كما في المثال:

مثال:

اذا كان $ق (س) = س^{2} + 1$ ، $هـ (س) = 3 س$ أوجد قيم س في الحالتين

عندما (i) $(ق \circ هـ)(س) = 10$ ، وعندما (ii) $(هـ \circ ق)(س) = 10$

الحالة الأولى: $(ق \circ هـ)(س) = ق (هـ (س)) = ق (3 س) = (3 س)^{2} + 1 = 10$

$\therefore 9 س^{2} + 1 = 10 \longleftarrow 9 س^{2} + 1 = 10 = صفر$

$9 س^{2} - 9 = صفر \longleftarrow س^{2} - 1 = صفر (س + 1)(س - 1) = صفر$

$\therefore س = \pm 1$

الحالة الثانية: $(هـ \circ ق)(س) = هـ (ق(س)) = هـ (س^{2} + 1) = 3 (س^{2} + 1) = 10$

$3 س^{2} + 3 = 10 \longleftarrow 3 س^{2} + 3 = 10$

$3 س^{2} - 7 = صفر \longleftarrow (\sqrt{3} س + \sqrt{7})(\sqrt{3} س - \sqrt{2}) = صفر$

$س = \pm \sqrt{\frac{1}{3}}$ لاحظ تباين الأجوبة في الحالتين.

(٨- ٧) الاقتران العكسي Inverse Function:

من المعلوم أن $ق_1$(س) = {(١، ٥) ، (٢ ، ٧) ، (٣ ، ٨) ، (٤ ، ٦)} اقتران -لعدم تكرار المسقط الأول-

مجاله المجموعة $أ_1$ = {١ ، ٢ ، ٣، ٤} المساقط الأولى

ومداه المجموعة $ب_1$ = { ٥ ، ٧ ، ٨، ٦} المساقط الثانية

والآن اذا استبدلنا مداه بمجاله والعكس، فهل الناتج اقتران أيضا؟

لنرى: هل:

$هـ_1$ (س) = {(٥ ، ١) ، (٧ ، ٢) ، (٨ ، ٣) ، (٦ ، ٤) } اقتران؟

الجواب: نعم كون المسقط في جميع الأزواج المرتبة لم يكرر.

× من المعلوم أيضاً أن $ق_2$ (س) = {(١ ، ٥) ، (٢ ، ٦) ، (٣ ، ٦) ، (٤ ، ٨)} اقتران – لعدم تكرار المسقط الأول-

مجاله المجموعة $أ_2$ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤}.

ومداه المجموعة $ب_2$ = {٥ ، ٦ ، ٨}

وإذا استبدلنا مداه بمجاله والعكس، فهل الناتج اقتران أيضاً؟

لنرى هل:

$هـ_2$ (س) = { (٥ ، ١) ، (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣) ، (٨ ، ٤)} اقتران؟

الجواب: لا كون المسقط الأول ٦ تكرر في زوجين مرتبين هما (٦ ، ٢) ، (٦ ، ٣)

لذلك فالاستبدال -جعل المدى مجال والمجال مدى- ينتج أحياناً اقتران مثل $هـ_1$(س) وأحياناً أخرى لا مثل $هـ_2$ (س).

لنركز على نوع الاقتران $ق_1$(س) والذي عكسه (بعد استبدال المساقط) اقتران؟

ق$_1$ (س) اقتران واحد لواحد كون أي من المساقط الثانية لا تتكرر في الأزواج المرتبة.

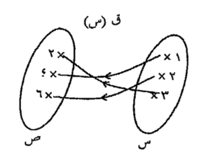
ولأن كل عنصر في مداه هو صورة لعنصر واحد فقط في مجاله.

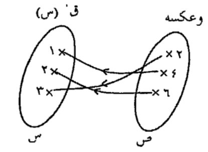
وبالرموز، لكل س$_1$ $\neq$ س$_2$ في مجاله $\xrightarrow{\text{فإن}}$ ق (س$_1$) $\neq$ ق (س$_2$)

وأما الاقتران ق$_2$ (س) والذي عكسه (بعد استبدال المساقط) ليس اقتران بل علاقة فقط، فهو اقتران ليس واحد لواحد.

لذا فالاقتران الذي عكسه اقتران يجب أن يكون اقتران واحد لواحد.

فإذا كان ق(س) اقتران واحد لواحد، فإن الاقتران العكسي له يرمز له بالرمز ق$^{-1}$ (س) والشكل يوضح الاقتران.

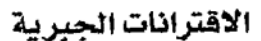


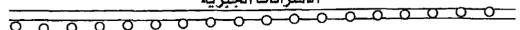


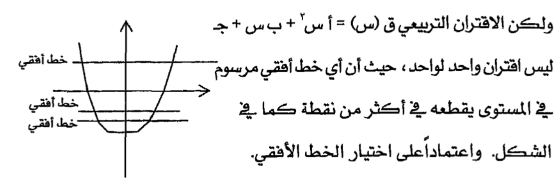
والآن ما الذي يُحدد فيما إذا كان ق (س) اقتران عكسي ق$^{-1}$ (س) أم لا؟

انه اختبار الخط الأفقي للتأكد من أن ق (س) هو اقتران واحد لواحد، ليكون له اقتران عكسي ق$^{-1}$ (س).

فالاقتران الخطي ق (س) = أ س + ب اقتران واحد لواحد حيث أن أي خط مرسوم في المستوى لا يمكن أن يقطعه بأكثر من نقطة كما في الشكل.







ولكن الاقتران التربيعي ق (س) = أ $س^{٢}$ + ب س + جـ ليس اقتران واحد لواحد، حيث أن أي خط أفقي مرسوم في المستوى يقطعه في أكثر من نقطة كما في الشكل. واعتماداً على اختيار الخط الأفقي.

ويمكن القول أن الاقترانات الخطية والتعكعيبية اقترانات واحد لواحد ولها اقترانات عكسية وان الاقترانات التربيعية ليست اقترانات واحد لواحد وليس لها اقترانات عكسية.

والآن العملية المكانيكية لإيجاد الاقتران العكسي $ق^{١}$ (س).

وعند ايجاد $ق^{١}$ (س) لأي اقتران واحد لواحد فإننا نسترشد بالقاعدة التالية:

(ق ٥ $ق^{١}$)(س) = ($ق^{١}$ ٥ ق)(س) = س

كون صورة العنصرين تركيب الاقتران ومعكوسه مساوية للصفر نفسه.

مثال:

وللتأكد من ذلك افرض أن ق (س) = {(١ ، ١) ، (٢ ، ٨) (٣ ، ٢٧)}

فإن $ق^{١}$(س) = {(١ ، ١) ، (٨ ، ٢) (٢٧ ، ٣)} بعد استبدال المساقط الأولى بالثانية.

ومنها ق (٢) = ٨ ، $ق^{١}$ (٨) = ٢

لأي (ق ٥ $ق^{١}$) (٢) = ٢ نفس العدد

وكذلك ($ق^{١}$ ٥ ق) (٨) = ٨ نفس العدد

أي أن (ق ٥ $ق^{١}$) (س) = (ق١ ٥ ق) (س) = س

مثال:

إذا كان ق (س) = ٢ س + ٥ أوجد اقترانه العكسي اذا كان له اقتران عكسي؟

يمكن ايجاد $ق^{1}$ (س) بطريقتين:

الأولى: تطبق القاعدة (ق ٥ $ق^{1}$) (س) = ق ($ق^{1}$ (س)) = س

الأولى: (هـ ٥ $هـ^{-1}$) (س) = هـ ($هـ^{-1}$ (س)) = س من القاعدة

أي أن: $(هـ^{-1}(س))^{٣} = ٣$

ومنها وبأخذ الجذر التكعيبي للطرفين:

∴ ($هـ^{-1}$ (س)) = $\sqrt[٣]{س}$

∴ $هـ^{-1}$ (س) = $\sqrt[٣]{س}$ الاقتران العكسي للاقتران هـ (س)

الثانية: نفرض ص = هـ (س)

∴ ص = $س^{٢}$

∴ $\sqrt[٣]{ص} = \sqrt[٣]{س^{٣}}$ بأخذ الجذر التكعيبي للطرفين

∴ $\sqrt[٣]{ص}$ = س

∴ ص = $\sqrt[٣]{س}$ ثم نبدل المسميات س بدل ص والعكس صواب

∴ $هـ^{-1}$ (س) = $\sqrt[٣]{س}$ الاقتران العكسي للاقتران هـ (س)

والجواب بالطريقتين واحد وصواب.

(٨ - ٨) قسمة كثيرات الحدود:

نعود ثانية الى كيفية اجراء عملية القسمة وبطريقتين في الاقترانات وعلى وجه الخصوص كثيرات الحدود، لنستطيع مناقشة نظريتي الباقي والعوامل وكيفية تحليل الاقترانات الى عواملها الأولية في فصول أخرى من هذا المؤلف، وللتوصل الى كيفية حل المعادلات في الاقترانات بأنواعها في حقل الأعداد الحقيقية.

عملية القسمة في الاقترانات الجبرية وكثيرات الحدود بوجه خاص تتم بطريقتين هما:

الطريقة الأولى: القسمة الطويلة (Longe Division) أو خوارزمية - تكرار خطوات العملية- القسمة كونها تُنسب الى العالم العربي الخوارزمي (٧٨٠ - ٨٥٠)م والتي مفادها بإيجاد شديد:

إذا كان ق (س) ، هـ (س) اقترانين كثيري الحدود حيث هـ (س) ≠ صفر

فإن ق (س) ÷ هـ (س) = (ق/هـ) (س) واللذان ينتجان

اقترانين كثير الحدود هما ك (س) = ر (س) بحيث أن

ق(س) = هـ (س) · ك (س) + ر (س) حيث · ≥ درجة (س) ≥ هـ (س)

وتتم عملية القسمة الطويلة بوضع الاقترانان (كثيرات الحدود) على شكل قسمة طويلة – كما في الأعداد الحقيقية- كما في الشكل:

عندها نُطلق على الاقترانات

المُسميات التالية:

ق (س) يُسمى المقسوم

هـ (س) يُسمى المقسوم عليه

ك (س) يُسمى خارج القسمة (الجواب)

ر (س) يُسمى الباقي

	ك (س)
هـ (س)	ق (س)
	⋮
	ر(س)

ويجب ملاحظة أن: درجة هـ (س) المقسوم عليه + درجة ك (س) خارج القسمة = درجة ق (س) المقسوم.

وهذا واضح من المثال التالي:

مثال:

إذا كان ق (س) = ٣ س^{٣} - ٧ س^{٢} + ١

هـ (س) = س - ٢

أوجد خارج قسمة ق (س) على هـ (س) والباقي باستخدام القسمة الطويلة.

الخطوات بإيجاز شديد: الحل:

نقسم ٣ س^{٣} على س = ٣ س^{٢}

ثم نضرب ٣ س^{٢} في (س - ٢) كاملاً

ثم نطرح كما في الشكل

ثم نكرر بأن نقسم − س^{٢} على س = − س

ثم نضرب − س في (س - ٢) كاملاً

ثم نطرح ونكرر حتى نصل الى الباقي = - ٣

٣س^{٢} − س − ٢
س − ٢ | ٣س^{٣} − ٧س^{٢} + ١
∓ ٣س^{٣} ± ٦س^{٢}
− س^{٢} + ١
± س^{٢} ∓ ٢س
− ٢س + ١
± ٢س ∓ ٤
− ٣

"يجب ملاحظة أن درجة الباقي ر(س) أقل من درجة المقسوم عليه هـ (س) = س - ٢ دائماً".

وكما هو واضح فإن خارج القسمة ك (س) = ٣ س^{٢} − س - ٢

الباقي ر (س) = - ٣

ويمكن وضع الاقترانات السابقة على الصورة:

ق (س) = هـ (س) • ك (س) + ر (س) كما في الأعداد الحقيقية

حيث ٢٩ = (٧) (٤) + ١

٧
٤ | ٢٩
∓ ٢٨
١

أي أن درجة المقسوم = درجة خارج القسمة + درجة المقسوم عليه

حيث (٣) = (٢) - + (١)

وهذه العملية تسمى خوارزمية القسمة في الاقترانات الجبرية.

ودرجة ر (س) الباقي هي صفر كونه اقتران ثابت داخل من درجة المقسوم عليه هـ (س)

مثال:

اقسم $٢ س^{٣} - ٣ س^{٢} + ٢$ بالقسمة الطويلة

الحل كما هو على اليسار ومنه:

خارج القسمة = ٢ س - ٣

الباقي = - ٤ س + ٦

وهكذا...

- المقسوم عليه: $س^{٢} + ٢$
- خارج القسمة: $٢ س - ٣$
- $٢ س^{٣} - ٣ س^{٢}$
- $\mp ٢ س^{٣} \mp ٤ س$
- $-٣ س^{٢} - ٤ س$
- $\pm ٣ س^{٢} \pm ٦$
- $-٤ س + ٦$

الطريقة الثانية: القسمة التركيبية Synthetic Division وهذه الطريقة في القسمة تعتبر حالة خاصة لا تتم إلا إذا كان المقسوم عليه كثير حدود خطي أي من الدرجة الأولى فقط.

نعم إنها عملية قسمة مختصرة لكثير حدود درجته أكثر من ١ على كثير حدود من الدرجة الأولى.

ويكون المقسوم عليه وعلى الصورة العامة هـ (س) = س – أ كما في الخطوات التالية:

مثال:

اقسم $(٢ س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٥ س - ١٦)$ على (س - ٣)

نجد صفر المقسوم عليه هكذا س – أ = صفر ⟵ س = أ حيث أ يُسمى صفر س - أ

ومنها س - ٣ = صفر ⟵ س = ٣ صفر المقسوم عليه

ثم نكتب معاملات حدود المقسوم مرتبة حسب قوى س التنازلية دون استثناء في حدوده كما يلي:

صفر المقسوم عليه	$س^3$	$س^2$	س	$س^0$ الثابت
(٣)	٢	٣	١٥-	١٦-
	↓	٦	٢٧	٣٦
	٢	٩	١٢	٢٠

والخطوات تتم كما يلي:

انزل معامل الحد الأول كما هو لأنه العامل الأول

ثم اضرب ٢ × ٣ = ٦ وضعه تحت المعامل الثاني

ثم اجمع ٣ + ٦ = ٩

ثم اضرب ٩ × ٣ = ٢٧ وضعه تحت المعامل الثالث

ثم اجمع - ١٥ + ٢٧ = ١٢

ثم اضرب ١٢ × ٣ = ٣٦ وضعه تحت المعامل الرابع

ثم اجمع - ١٦ + ٣٦ = ٢٠ فيكون هوالباقي

وبالإيجاز الشديد تتم عملية القسمة التركيبية، بإنزال معامل الحد الأول دائماً ثم الضرب والجمع حتى تتوصل الى الباقي. كما هو واضح أعلاه.

وحيث أن درجة خارج القسمة أقل بدرجة واحدة عن درجة المقسوم فإنه اقتران تربيعي يبدأ بـ $س^2$

∴ خارج القسمة ك (س) = ٢ $س^2$ + ٩ س + ١٨ والباقي ر (س) = ٢٠ درجته أقل من درجة المقسوم عليه.

وهذا يطابق خوارزمية القسمة ، حيث:

ق (س) = هـ (س) · ك (س) + ر (س)

أي أن:

$٢ س^٣ + ٣ س^٢ - ١٥س - ١٦ = (س - ٣)(٢ س^٢ + ٩ س + ١٨) + ٢٠$

(تحقق من ذلك بالضرب)

مثال:

اقسم (ص٤ - ١٥ ص^٢ + ٢ ص - ٨) على (ص + ٤) بالقسمة التركيبية

نجد صفر المقسوم عليه: ص + ٤ = صفر ⟵ ص = - ٤

ثم نرتب كما في المثال السابق: وبما أن المقسوم عليه لا يحتوي على ص^٢

فإن معامل ص^٢ = صفرأي ٠ ص^٢ وجب التنويه

صفر المقسوم عليه	ص^٤	ص^٣	ص^٢	ص^١	ص^٠ الثابت
(-٤)	١	٠	-١٥	٢	-٨
	↓	-٤	١٦	-٤	٨
	١	-٤	١	-٢	٠

وبأسلوب مماثل لما سبق فإن:

خارج القسمة ك (س) = ص^٣ - ٤ ص^٢ + ص - ٢ كون درجة خارج القسمة أقل بواحدة عن درجة المقسوم.

الباقي ر (س) = صفر

مثال:

اقسم (٦ س^٢ - ٢ س - ١٨) على (٢ س - ٤)

نجد صفر المقسوم عليه:

$٢ س - ٤ = صفر ⟵ ٢ س = ٤ ⟵ س = \frac{٤}{٢} = ٢$

وبشكل عام نضع المقسوم عليه بصورة أ س + ب = صفر ⟵ أ س = − ب = − $\frac{ب}{أ}$

ثم نرتب بأسلوب مماثل للمثالين السابقين هكذا :

صفر المقسوم عليه	س^{٢}	س	س^{٠} الثابت
(٢)	٦	٢−	٨−
	↓	١٢	٢٠
	٦	١٠	١٢

خارج القسمة = ٦ س + ١٠

الباقي = ١٢

(٨− ٩) نظريتا الباقي والعوامل وتحليل كثيرات الحدود إلى عواملها الأولية:

نظرية الباقي Remainder Theorem:

نبدأ النقاش بهذا المثال:

مثال:

إذا كان ق (س) = س^{٤} + ٣ س^{٣} − ٥ س^{٢} + ٢ س − ٥

وكان هـ (س) = س − ١

أوجد باقي قسمة ق (س) على هـ (س) أي أوجد ر (س)

وهنا نُنبه بأن المقسوم عليه هـ (س) يجب أن يكون اقتراناً خطياً أي من الدرجة الأولى وعلى الصورة س − أ ،

نقر ونعترف حتى طرح هذا السؤال (المثال) بأننا لا نستطيع ايجاد باقي القسمة ر(س) إلا بعد اجراء عملية القسمة باحدى الطريقتين "الطويلة أو التركيبية" ولكن بعد لحظات من طرح السؤال سوف نستطيع ايجاد الباقي (س) مباشرة ومن نظرية الباقي دون اجراء عملية القسمة على الاطلاق.

لنبدأ بعملية القسمة ولتكن القسمة التركيبية هكذا:

صفر المقسوم عليه: س − ١ = صفر ← س = ١

(١)	$س^٤$	$س^٣$	$س^٢$	$س^١$	$س^٠$ الثابت
	١	٣	٥−	٢	٥−
	↓	١	٤	١−	١
	١	٤	١−	١	٤−

الباقي ر (س) = − ٤ بعد اجراء عملية القسمة.

ولكن ما قيمة ق (١) حيث ١ هو صفر المقسوم عليه؟

ق (١) = $(١)^٤$ + ٣ $(١)^٣$ − ٥ $(١)^٢$ + ٢ (١) − ٥ = −٤٫٠

الباقي: ر (س) = ق(١) حيث ١ صفر المقسوم عليه كما أسلفنا.

وهكذا: فإن باقي قسمة ق (س) على هـ (س) = س − أ هي ق (أ)

وهذا هو منطوق نظرية الباقي وبشكل عام إن باقي قسمة ق(س) على كثير الحدود الخطي هـ (س) = أ س + ب هي:

بعد ايجاد صفر المقسوم عليه: أ س + ب = صفر

أ س = − ب

أ = $\frac{-ب}{أ}$

∴ الباقي ر (س) = ق ($\frac{-ب}{أ}$) مباشرة ودون اجراء عملية القسمة اطلاقاً.

مثال:

أوجد باقي قسمة ق (س) = ٣ $س^٤$ − ٢ س + ١ على هـ (س) = ٢ س + ١

٢ س + ١ = صفر ← ٢ س = − ١ ← س = − $\frac{١}{٢}$ صفر المقسوم عليه

الباقي = ق (− $\frac{١}{٢}$) ٣ (− $\frac{١}{٢}$)٤ − ٢ (− $\frac{١}{٢}$) + ١ = $\frac{٣٥}{١٦}$

مثال:

ما قيمة م التي تجعل باقي قسمة ق(س) = (م + ٣) س^{٢} + ٥ م س + ١

على هـ (س) = س + ٢ هو العدد ٦

الحل: صفر المقسوم عليه = س + ٢ = صفر ⟵ س = − ٢

الباقي: ق (− ٢) = (م + ٣) (− ٢)^{٢} + ٥ م (− ٢) + ١ = ٦

∴ ٤ م + ١٢ − ١٠ م + ١ = ٦

ومنها − ٦ م = − ٧

م = $\frac{٧}{٦}$

نظرية العوامل The Factors Theorem:

نبدأ بالمنطوق العام للنظرية:

يكون الاقتران الخطي هـ (س) عامل من عوامل الاقتران ق (س) اذا وفقط إذا كان ق (صفر الاقتران الخطي) = صفر.

والتفسير:

يكون هـ (س) = س − أ عامل من عوامل كثير الحدود ق (س) اذا وفقط إذا كان ق (أ) = صفر والعكس أيضاً ضواب.

كما ويكون هـ (س) = أ س + ب "الخطي" عامل من عوامل كثير الحدود ق (س) إذا وفقط إذا كان ق (− $\frac{ب}{أ}$) = صفر والعكس أيضاً صواب.

والأمثلة التالية توضح ما أوردناه من حقائق عن نظرية العوامل:

مثال:

هل هـ (س) = س − ٢ عامل من عوامل ق (س) = س^{٣} − ٣ س^{٢} + س − ٣؟

الجواب: يكون هـ (س) عامل من عوامل ق (س) إذا كان ق (٢) = صفر

لنجد ق (٢) + (٢)^{٣} - ٣ (٢)^{٢} + ٢ - ٣ = ٨ – ١٢ + ٢ - ٣ = - ٥ ≠ صفر

∴ س - ٢ ليس عامل من عوامل س^{٣} - ٣ س^{٢} + س - ٣

مثال:

هل س - ٣ عامل من عوامل ق (س) = س^{٣} - ٣ س^{٢} + س - ٣

يكون س - ٣ عامل من عوامل ق (س) إذا كان ق (٣) = صفر

لنجد ق (٣) = (٣)^{٣} - ٣ (٣)^{٢} + ٣ - ٣ = صفر

∴ س - ٣ عامل من عوامل ق (س)

ويمكن أن يقال أن تحليل Factorizgation كثيرات الحدود الى عواملها الأولية من أشهر التطبيقات على نظرية العوامل.

والتفسير في هذه السطور:

العامل الأولي للاقتران كثير الحدود هو الاقتران الذي لا يمكن تحليله الى اقترانات أخرى أقل منه درجة، وبناء عليه إن اخراج العامل المشترك الأكبر كعدد حقيقي (اقتران ثابت) لا يُعتبر تحليلاً الى العوامل الأولية، ففي الاقتران:

ق (س) = ٤ س + ٨ فإن ٤(س + ٢) ليس تحليلاً الى العوامل على الاطلاق.

كون ق (س) = ٤ س + ٨ اقتران خطي من الدرجة الأولى.

وكون هـ (س) = س + ٢ اقتران خطي من الدرجة الأولى.

فالاقتران هـ (س) = س+ ٢ ليس أقل من ق (س) = ٤ س + ٨ بدرجة على الاطلاق، لذا يقال أن الاقتران الخطي هو اقتران أولي لا يُحلل الى اقترانات أولية.

والاقتران التربيعي والذي على الصورة العامة ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

يكون أولياً وغير قابل للتحليل الى العوامل عندما يكون مخبره ب^{٢} – ٤ أ جـ < صفر

مثل ق (س) = س^{٢} + س + ١

حيث أ = ١ ، ب = ١ ، جـ = ١

حيث مميزه ب^{٢} - ٤ أ جـ = (١)^{٢} - ٤ × ١ × ١ = - ٣ < صفر

مثال:

بيّن أن س - ١ عامل أولي من عوامل الاقتران ق(س) = س^{٣} – ٣ س + ٢ الأولية ثم أوجد عوامله الأولية الأخرى.

س - ١ = صفر ⟵ س = ١ صفر المقسوم عليه.

لنجد: ق (١) = (١)^{٣} - ٣ (١) + ٢ = صفر

∴ س – ١ عامل من عوامل ق (س) = س^{٣} – ٣ س + ٢

ولإيجاد بقية العوامل نقسم س^{٣} – ٣ س + ٢ على س - ١ إما قسمة طويلة أو تركيبية هكذا وبالتركيبين:

س - ١ = صفر ⟵ س = ١ صفر المقسوم عليه

صفر المقسوم عليه	س^{٢}	س^{٢}	س	س^{٠} الثابت
(١)	١	٥	٣-	٢
	↓	١	١	٢-
	١	١	٢-	∴

∴ ق (س) = س^{٣} - ٢ س + ٢ = (س - ١) (س^{٢} + س - ٢)

ثم نحلل الناتج هكذا:

ق (س) = س^{٣} - ٢ س + ٣ = (س - ١) (س + ٢) (س - ١)

= (س - ١)^{٢} (س + ٢)

ملحوظة:

لكثير الحدود ق (س) = $أ_ن$ $س^ن$ + $أ_{ن-١}$ $س^{ن-١}$ + $أ_{ن-٢}$ $س^{ن-٢}$ + ... + $أ_١$. $س_١$ + $أ_.$ ذي المعاملات الصحيحة في بعض الأحيان أصفار نسبية ناتجة عن خارج قسمة عوامل الحد الأخير (المطلق) $أ_.$ على عوامل معامل الحد الأول (الرئيس) $أ_ن$ وذلك عندما يكون $أ_ن$ ∋ ح − {١} أي عدد صحيح ما عدا الواحد الصحيح كما في المثال:

مثال:

للاقتران الجبري ق (س) = ٢ $س^٣$ − ٥ $س^٢$ − ٤ س + ٣ أصفار نسبية ناتجة عن قسمة عوامل العدد ٣ على عوامل العدد ٢ حيث:

عوامل الحد $أ_.$ (٣) هي ± ١ ، ± ٣

عوامل معامل الحد $أ_ن$ (٢) هي ± ١ ، ± ٢

∴ جميع أصفار ق (س) موجبة كما في المجموعة {± ١ ، ± ٣ ، $\frac{±٣}{٢}$ ، $\frac{±١}{٢}$}

وأما الأصفار النسبية تنتمي الى المجموعة {− $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$ ، − $\frac{٣}{٢}$}

والبيان:

$$ق (\frac{١}{٢}) = ٢ (\frac{١}{٢})^٣ - ٥ (\frac{١}{٢})^٢ - ٤ (\frac{١}{٢}) + ٣$$

$$= \frac{٢}{٨} - \frac{٥}{٤} - \frac{٤}{٢} + ٣ = صفر$$

∴ هو الصفر النسبي للاقتران ق (س)

وبأسلوب مماثل يمكن أن نجد أصفار نسبية أخرى للاقتران ق (س) ان وجدت من ضمن المجموعة {− $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$ ، − $\frac{٣}{٢}$ ، $\frac{٣}{٢}$}

وهذا يساعد في تحليل كثيرات الحدود التي معاملات حدودها الأولى ليس واحد صحيح كما في المثال:

مثال:

حلل الاقتران ق (س) = ٢ س^{٣} – س^{٢} – ٨ س - ٥ الى عوامله الأولية:

لنبدأ البحث عن أصفار ق (س) الصحيحة والنسبية هكذا:

عوامل الحد الأخير (أ) هي - ٥ ، ٥ ، - ١ ، ١

عوامل معامل الحد الأول (أ$_{ن}$) هي - ٢ ، ٢ ، - ١ ، ١

وبما أن جميع أصفار ق (س) تنتمي الى المجموعة {- ٥، ٥، -$\frac{١}{٢}$، $\frac{١}{٢}$، - ١ ، ١}

وباستخدام نظرية العوامل نجد أن:

ق (- ١) = ٢ (- ١)^{٣} – (- ١)^{٢} - ٨ (- ١) - ٥ = - ٢ - ١ + ٨ - ٥ = صفر

∴ س = (- ١) = س + ١ عامل من عوامل ق (س)

وباستخدام القسمة الطويلة –كما في الشكل- نجد بقية العوامل هكذا:

∴ ٢ س^{٣} – س^{٢} - ٨ س - ٥ = (س + ١) (٢س^{٢} - ٣ س - ٥)

```
             ٢ س٢ – ٣س –٥
        ─────────────────────
س + ١ │ ٢ س٣ – س٢ – ٨ س –٥
         ∓ ٢ س٣ ∓ ٢ س٢
        ─────────────────────
          – ٣س٢ – ٨ س – ٥
          ± ٣ س٢ ± ٣ س
        ─────────────────────
               –٥ س + ٥
               ± ٥ س ± ٥
        ─────────────────────
                  ....
```

وبتحليل العامل الثاني

∴ ق (س) = (س + ١) (٢ س - ٥) (س + ١)

= (س + ١)^{٢} (٢ س - ٥)

والملاحظ أن جميع عوامل ق (س) الأولية من الدرجة الأولى أو خطية.

مثال:

حلل ق (س) = س^{٥} – ٢ س^{٤} – ٥ س^{٣} + ١٤ س + ١٢ الى عوامله الأولية

وبأسلوب مماثل ينتهي عن أصفاره في المجموعة.

{± ١ ، ± ٢ ، ± ٣ ، ± ٤ ، ± ٦ ، ± ١٢}

وباستخدام نظرية العوامل والقسمة الطويلة أو التركيبية نجد أن - ١ ، ٢ ، ٣ فقط هي أصفاره

∴ عوامله الأولية (س + ١) ، (س - ٢) ، (س - ٣) ، (س^{٢} + ٢ س + ٢)

والملاحظ أن عوامله الأولية ٣ اقترانات خطية واقتران تربيعي

(س^{٢} + ٢س + ٢) كون مميزه ب^{٢} – ٤ أ جـ = (٢)^{٢} - ٤ × ١ × ٢ = - ٤ < صفر

∴ ق (س) ، (س + ١)(س - ٢) (س - ٣) (س^{٣} + ٢ س + ٢)

ملحوظة جديرة بالاهتمام:

لقد مرّ في فصل التحليل الى العوامل من هذا المؤلف أن طرق التحليل خمس وهي..اخراج العامل المشترك، تجميع الحدود، العبارة التربيعية، الفرق بين مربعين، مجموع مكعبين والفرق بينهما..، والآن سيضاف طريقة سادسة وهي باستخدام نظرية العوامل لتصبح الطرق ستة كما لاحظت في الأمثلة السابقة.

ملحوظة أخرى هامة جدا:

مرّ في فصل التحليل الى العوامل أن الاقترانات التي على صورة الفرق بين مربعين مثل ق (س) = س^{٢} - ٤ تحلل، أما إذا كانت على صورة مجموع مربعين مثل ق (س) = س^{٢} + ٤ فلا تحلل، هذا صحيح ولكن ليس دائماً لا تحلل، بل يحلل (مجموع مربعين) إذا أمكن تحويله الى صورة الفرق بين مربعين كما في المثال:

مثال (أ):

حلل الاقتران ق (س) = س^{٤} - ١ الى عوامله الأولية

التحليل هنا لا يحتاج الى نظرية العوامل كونه مرّ سابقاً كما يلي:

س^{٤} − ١ = (س^{٢} − ١) (س^{٢} + ١) كفرق بين مربعين

= (س − ١) (س + ١) (س^{٢} + ١) وكفرق بين مربعين أيضاً للاقتران س^{٢} − ١

س^{٤} − ١ = (س − ١) (س + ١) (س^{٢} + ١) كون س^{٢} + ١ لا يحلل لأنه اقتران تربيعي مميزه ب٢ − ٤أجـ = (٠)^{٢} − ٤ × ١ × ١

= − ٤ سالب

مثال (ب):

لكن هل الاقتران س^{٤} + ١ يحلل الى عوامله الأولية مع أنه بصورة مجموع مربعين هكذا: (س^{٢})^{٢} + (١)^{٢}

الجواب: مع أنه بصورة مجموع مربعين فإنه يحلل كما يلي:

نحوله الى صورة فرق بين مرتبتين (س^{٢})^{٢} + (١٠)^{٢} فإضافة ضعف الحد الأول× الحد الثاني = ٢ × س^{٢} × ١ = ٢ س^{٢} ثم طرحه:

س^{٤} + ١ = س^{٤} + ١ + ٢ س^{٢} − ٢ س^{٢} بإضافة ٢ س^{٢} وطرحه كما هو واضح والسبب والسبب جعله كفرق بين مربعين هكذا:

= (س^{٤} + ٢ س^{٢} + ١) − ٢ س^{٢}

= (س^{٢} + ١)^{٢} − ($\sqrt{٢}$ س)^{٢}

والآن بعد تحويله الى صورة الفرق بين مربعين أصبح يحلل.

أي أن س^{٤} + ١ = (س^{٢} + ١ − $\sqrt{٢}$ س) (س^{٢} + ١ + $\sqrt{٢}$ س) وبعد ترتيب حدوده.

= (س^{٢} − $\sqrt{٢}$ س + ١) (س^{٢} + $\sqrt{٢}$ س + ١)

وللتحقق من صحة التحليل نستخدم قانون التوزيع أي نعكس السؤال هكذا:

$(س^{٢} - \sqrt{٢}\,س + ١)\,(س^{٢} + \sqrt{٢}\,س + ١) \overset{؟}{=} س^{٤} + ١$ لنرى..

الطرف الأيمن:

$= س^{٢}\,(س^{٢} + \sqrt{٢}\,س + ١) - \sqrt{٢}\,س\,(س^{٢} + \sqrt{٢}\,س + ١) + ١\,(س^{٢} + \sqrt{٢}\,س + ١)$

$= س^{٤} + \sqrt{٢}\,س^{٣} + س^{٢} - \sqrt{٢}\,س^{٣} - ٢\,س^{٢} - \sqrt{٢}\,س + س^{٢} + \sqrt{٢}\,س + ١$

$= س^{٤} + ١$ = الطرف الأيسر   فطريقة الحل صواب!

مثال:

حلل $س^{٤} + ٤$ الى عوامله الأولية:

نحوّل الاقتران $س^{٤} + ٤$ إلى صورة فرق بين مربعين وذلك:

$س^{٤} + ٤ \neq (س^{٢})^{٢} + (٢)^{٢}$ باضافة ضعف الحد الأول × الحد الثاني

$= ٢ \times س^{٢} \times ٢ = ٤\,س^{٢}$ ثم طرحه هكذا:

$س^{٤} + ٤ = س^{٤} + ٤ + ٤\,س^{٢} - ٤\,س^{٢}$

$= (س^{٤} + ٤\,س^{٢} + ٤) - ٤\,س^{٢}$

$= (س^{٢} + ٢)^{٢} - (٢\,س)^{٢}$ **أصبح بصورة فرق بين مربعين**

$= (س^{٢} + ٢ - ٢\,س)\,(س^{٢} + ٢ + ٢س)$ **وبعد ترتيب حدوده.**

$= (س^{٢} - ٢\,س + ٢)\,(س^{٢} + ٢\,س + ٢)$

تحقق من صحة الحل باستخدام قانون التوزيع كما مرّ بالمثال أعلاه

(٨- ١٠) حل أنظمة من المعادلات الجبرية بمتغير واحد:

Solving Algebric Equations with one Variabh

نعود الى المعادلات ونحل أنظمة بمتغير واحد بالذات لكن بكافة الدرجات "الأول والثانية والثالثة، ..." وعلى جميع أنواع الاقترانات.

التفسير كما هو آت:

(i) حل أنظمة من المعادلات تحتوي على اقترانات القيمة المطلقة:

في البداية هناك خاصية للقيمة المطلقة تستخدم في حل المعادلات التي تحتوي اقترانات القيمة المطلقة وهي:

إذا كان |س| = |ص|

فاما س = ص واما س = - ص

فإذا كان |س| = |٥|

فإما س = - ٥ واما س = ٥

وبشكل عام إذا كان |س| = ص

فاما س = ص ؛ واما س = - ص كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية:

(i) |س| = ٣ (ii) |٢ س - ١| = ٥

(iii) |س^{٢} – س + ٢| = ٢ (iv) |س - ٤| = |٢س + ١|

(v) |٣ س + ١| = |س + ٧| لكل على انفراد.

الحل:

يتم الحل بالتخلص من رمز القيمة المطلقة | |، وذلك بإعادة التعريف، وبأخذ القيمتين الموجبة والسالبة للطرف الأيسر كما مرّ أعلاه هكذا:

(i) |س| = ٣ ⟵ س = - ٣، س = ٣ مجموعة الحل = {- ٣ ، ٣}

وكذلك $|٢ س - ١| = ٥$

أي أن ٢ س - ١ = - ٥ ، ٢ س - ١ = ٥

٢ س = - ٤ ، ٢ س = ٦

س = - ٢ ، س = ٣

مجموعة الحل = {- ٢ ، ٣}

وكذلك $|س٢ - س + ٢| = ٢$

أي أن $س^٢ - س + ٢ = - ٢$ ، $س٢ - س + ٢ = ٢$

$س^٢ - س + ٤ = صفر$ $س٢ - س = صفر$

عبارة أولية كون غيرهما س (س - ١) = صفر

$ب^٢ - ٤ أ جـ = - ١٥ < صفر$ س = صفر ، س = ١

لا نحلل

مجموعة الحل = { صفر ، ١ }

وكذلك $|س - ٤| = |٢س + ١|$

وبناءً على الخاصية أعلاه:

س - ٤ = ٢ س + ١ ، س - ٤ = - (٢ س + ١)

س - ٤ - ٢ س = صفر ، س - ٤ + ٢ س + ١ = صفر

- س - ٥ = صفر ٣ س - ٣ = صفر

س = - ٥ س = ١

مجموعة الحل = {- ٥ ، ١}

وكذلك |٣ س + ١| = |س + ٧|

٣ س + ١ = س + ٧ ، ٣ س + ١ = - س - ٧

٣ س – س + ١ - ٧ = صفر ، ٣ س + ١ + س + ٧ = صفر

٢ س - ٦ = صفر ، ٤ س + ٨ = صفر

٢ س = ٦ ، ٤ س = - ٨

س = ٣ ، س = - ٢

مجموعة الحل = {- ٢ ، ٣} تحقق من صحة الحل.

(ii) حل أنظمة من المعادلات الخطية التي تحتوي اقترانات أكبر عدد صحيح (اقترانات درجية أو سُلّمية)

مثال:

أوجد مجموعة الحل للمعادلات التالية:

(i) [٣ س] = ٤ ، (ii) [٦ – ٢ س] = صفر

(iii) س – [س] = صفر حيث – ٢ ≤ س < ١

كل على انفراد

يتم الحل بإعادة التعريف للتخلص من رمز أكبر عدد صحيح [ ] وذلك باستخدام التعريف العام للاقتران ق (س) = [س] وهو:

[س] ←(اعادة التعريف) ن ≤ س < ن + ١

حل (i) [٣ س] = ٤ ، ٤ ≤ ٣ س < ٥

وبقسمة الأطراف على ٣ ، ٤/٣ ≤ س < ٥/٣

مجموعة الحل = { ٤/٣ ≤ س < ٥/٣ }

وتمثيل المجموعة متغيرة: س ∈ [$-\frac{٤}{٣}$ ، $\frac{٥}{٣}$)

وتمثيل المجموعة على خط الأعداد:

$-\infty$ $-\frac{٤}{٣}$ $\frac{٥}{٣}$ ∞

حل (ii) [٦ − ٢س] = صفر   وبإعادة التعريف:

صفر ≤ ٦ − ٢ س < ١   وبإضافة - ٦ لجميع الأطراف

- ٦   - ٦   - ٦

$\frac{-٦}{-٢} \geq \frac{-٢س}{-٢} > \frac{-٥}{-٢}$ وبقسمة جميع الأطراف على - ٢ مع تغير اشارة التباين أو علاقة الترتيب هكذا:

٣ ≥ س > $\frac{٥}{٢}$

أي $\frac{٥}{٢}$ < س ≤ ٣   مجموعة الحل { $\frac{٥}{٢}$ < س ≤ ٣ }

وبشكل فترة س ($\frac{٥}{٢}$ ، ٣] وعلى خط الأعداد

$-\infty$ $\frac{٥}{٢}$ ٣ ∞

وللتحقق من صحة الحل: افرض س = ٢,٦ = $\frac{٢٦}{١٠}$

أي أن [٦ − ٢ ($\frac{٢٦}{١٠}$)] = [٦− $\frac{٥٢}{١٠}$] = [٦− ٥,٢] = [٠,٨] = صفر

وهذا يحقق السؤال.

حل (iii) س − [س] = صفر ، حيث - ٢ ≤ س < ١

نُعيد التعريف على الفترة [- ٢ ، ١)

وحيث أن طول الدرجة = $\frac{١}{|١|}$ = ١ هكذا:

- ٢   ٠   - ١   ٠   ١

نُعرِّف أولاً [س] على الفترة هكذا:

$$[س] = \begin{cases} -٢ &، \quad -٢ \leq س < -١ \\ -١ &، \quad -١ \leq س < ٠ \\ ٠ &، \quad ٠ \leq س < ١ \end{cases}$$

ومن المعادلة: س − [س] = صفر

$$+[س] \qquad +[س]$$

$$س = [س]$$

$$\therefore \quad س = \{-٢ ، -١ ، ٠\}$$

مجموعة الحل = {-٢ ، -١ ، ٠} ولا تمثل بفترة

وإنما على خط الاعداد كأعداد حقيقية فقط.

$$-\infty \quad ٠ \quad -١ \quad -٢ \quad \infty$$

وللتحقق: عندما س = -٢

أي -٢ − [-٢] = -٢ − (-٢) = صفر وهكذا...

(iii) حل أنظمة من المعادلات تحتوي اقترانات كثيرة الحدود (بمتغير واحد) ومن درجات متعددة كما في المثال:

مثال:

أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات التالية:

(١) $س^٣ + ٦ س^٢ + ١١ س + ٦ =$ صفر

(٢) $٣ س^٤ - ٤٨ س^٢ =$ صفر

(٣) $س^٥ - ٢س^٣ + س =$ صفر

(٤) $س^٦ - ٩ س^٣ + ٨ =$ صفر

(٥) $س^٤ + ١٦ =$ صفر

يتم الحل باستخدام طرق التحليل الى العوامل ونظريتي الباقي والعوامل والقسمة الطويلة أو التركيبية، كما يتطلب الحل هكذا:

حل (١):

س^{٣} + ٦ س^{٢} + ١١ س + ٦ = صفر

نحلل الاقتران المرافق ق (س) = س^{٣} + ٦ س^{٢} + ١١ س + ٦ (الطرف الأيمن) الى عوامله.

وحيث أن أصفاره المحتملة من المجموعة {± ٦ ، ± ٣ ، ± ٢ ، ± ١}

وبالتجريب (نظرية العوامل والباقي) ق (- ١) = (- ١)^{٣} + ٦(- ١)^{٢} + ١١ (- ١) + ٦

= - ١ + ٦ - ١١ + ٦ = ١٢ - ١٢ = صفر

∴ - ١ صفر للاقتران ومنها س + ١ عامل من عوامله الأولية

وبالقسمة التركيبية نجد بقية العوامل هكذا:

أي أن

(-١)	س^{٣}	س^{٢}	س	س^{٠}
	١	٦	١١	٦
	↓	-١	-٥	-٦
	١	٥	٦	∴

س^{٣} + ٦ س^{٢} + ١١ س + ٦ = (س + ١) (س^{٢} + ٥ س + ٦) وتحليل الطرف الأيسر

= (س + ١) (س + ٣) (س + ٢) = صفر

∴ س = - ١ ، - ٢ ، - ٣ جذور المعادلة

مجموعة الحل = {- ١ ، - ٢ ، - ٣} تحقق من صحة الحل.

حل (٢):

وكذلك ٣ س^{٤} – ٤٨ س^{٢} = صفر

بتحليل الطرف الأيمن وهو الاقتران المرافق للمعادلة كما يلي:

٣ س^{٢} (س^{٢} - ١٦) = صفر   اخراج العامل المشترك ٣س^{٢}

٣ س^{٢} (س + ٤) (س - ٤) = صفر   ثم تحليل فرق بين مربعين

ومنها ٣ س^{٢} = صفر ⟵ س = صفر   الجذر الأول للمعادلة

س + ٤ = صفر ⟵ س = - ٤   الجذر الثاني للمعادلة

س - ٤ = صفر ⟵ س = ٤   الجذر الثالث للمعادلة

مجموعة الحل = {- ٤ ، صفر ، ٤}   تحقق من صحة الحل إن شئت.

حل (٣):

وكذلك   س^{٥} - ٢ س^{٣} + س = صفر

نحلل الطرف الأيمن وهو الاقتران المرافق للمعادلة كما يلي:

س (س^{٤} - ٢ س^{٢} + ١) = صفر   اخراج العامل المشترك س

س (س^{٢} - ١) (س^{٢} - ١) = صفر   ثم تحليل عبارة تربيعين

س (س + ١) (س - ١) (س + ١) (س - ١) = صفر

ومنها: س = صفر   جذر المعادلة الأول

س + ١ = صفر ⟵ س = - ١   جذر المعادلة الثاني

س - ١ = صفر ⟵ س = ١   جذر المعادلة الثالث

والجذران - ١ ، ١   مكرران

مجموعة الحل = {- ١ ، صفر ، ١} إن أردت أن تتحقق من صحة الحل فتحقق!

وكذلك $س^6 - 9 س^3 + 8 = صفر$

بوضع المعادلة بصورة عبارة تربيعية واستعانة بالقانون عند الرفع نضرب الأسس هكذا: $س^3 \times س^3 = (س^3)^2$ تصبح المعادلة:-

$\therefore (س^3)^2 - 9 س^3 + 8 = صفر$

$(س^3 - 1)(س^3 - 8) = صفر$ تحليل كعبارة تربيعية

$(س - 1)(س^2 + س + 1)(س - 2)(س^2 + 2 س + 4) = صفر$ وتحليل كفرق مكعبين لكليهما

$س - 1 = صفر$ $س = 1$ جذر المعادلة الأول

$س^2 + س + 1 = صفر$ عبارة تربيعية مميزها سالب $(ب^2 - 4 أ جـ = (1)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3)$ جذورها غير حقيقيين

$س - 2 = صفر$ $س = 2$ جذر المعادلة الثانية

$س^2 + 2 س + 4 = صفر$ عبارة تربيعية مميزها سالب (تأكد) جذورها غير حقيقية

$\therefore س = 1 ، 2$ جذور المعادلة

مجموعتي الحل = $\{1 ، 2\}$ تحقق من صحة الحل.

ملحوظة:

هذا ويمكن التوصل الى الخطوة:

$(س^3 - 1)(س^3 - 8) = صفر$ بأسلوب أبسط هو:

افرض أن $س^3 = ص$ عندها $س^6 - 9 س^3 + 8 = صفر$

$= (س^3)^2 - 9 س^3 + 8 = صفر$

أي أن $ص^2 - 9 ص + 8 = صفر$

$(ص - 1)(ص - 8) = صفر$

ثم استبدل $ص = س^3$

$\therefore (س^3 - 1)(س^3 - 8) = صفر$ وبقيه كما هو أعلاه بالتمام.

(٨- ١١) تجزئة الاقترانات الجبرية النسبية أو (تجزئة الكسور الجبرية):

Partial of the Rational Functions:

من المعلوم أن ناتج جمع الاقترانين النسبيين:

$$\frac{٨}{\text{س} + ١} + \frac{٥}{\text{س} - ٤} = \frac{٨(\text{س} - ٤)}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٤)} + \frac{٥(\text{س} + ١)}{(\text{س} - ٤)(\text{س} + ١)}$$

توحيد المقامات

$$= \frac{٨(\text{س} - ٤) + ٥(\text{س} + ١)}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٤)} = \frac{٨\text{س} - ٣٢ + ٥\text{س} + ٥}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}$$

$$= \frac{١٣\text{س} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}$$

$$\therefore \frac{٨}{\text{س} + ١} + \frac{٥}{\text{س} - ٤} = \frac{٣\text{س} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}$$

والعكس لننظر الى السؤال بطريقة عكسية لنقول:

ما السبيل لجعل الطرف اليسار المكون من اقتران نسبي واحد هو $\frac{٣\text{س} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤}$

اقترانين نسبيين هما: $\frac{٨}{\text{س} + ١}$ ، $\frac{٥}{\text{س} - ٤}$ (كما هو واضح أعلاه)؟

الجواب:

هذه العملية العكسية والتي نحن بصددها الآن تُسمى تجزئة الاقترانات النسبية (أو الكسور الجبرية).

وتتم كما يلي (شرط أن يكون درجة البسط أقل من درجة المقام في جميع الحالات). وهذا الشرط خاص ومقبول في هذا المستوى بالذات.

دونك عملية تجزئة الكسور الجبرية أو الاقترانات النسبية بإيجاز:

$$\frac{١٣\text{س} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٣\text{س} - ٤} = \frac{٣\text{س} - ٢٧}{(\text{س} + ١)(\text{س} - ٤)} = \frac{\text{أ}}{\text{س} + ١} + \frac{\text{ب}}{\text{س} - ٤}$$ تحليل المقام

$\therefore \frac{١٣ س - ٢٧}{س^٢ - ٣ س - ٤} = \frac{أ (س - ٤) + ب (س + ١)}{(س + ١) (س - ٤)}$ بعد اعادة توحيد المقامات

$\frac{١٣ س - ٢٧}{س^٢ - ٣ س - ٤} = \frac{أ س - ٤ أ + ب س + ب}{(س + ١) (س - ٤)}$ وبما أن الاقترانين النسبيين متساويين والمقامات متساوية أيضاً:

∴ بسط الكسر الأول = بسط الكسر الثاني (الكسور الجبرية)

∴ ١٣ س – ٢٧ = أ س - ٤ أ + ب

∴ ١٣ س - ٢٧ = (أ + ب) س – (٤ أ – ب) فالاقترانان الخطيان متساويان

أي أن المعاملات المتناظرة متساوية:

∴ أ + ب = ١٣ ⟵ (١) (معاملات س)

وكذلك ٤ أ – ب = ٢٧ ⟵ (٢) (الحدود المطلقة)

بحل المعادلتين بالحذف أو أي طريقة أخرى.

جمعاً

٥ أ = ٤٠ ⟵ أ = $\frac{٤٠}{٥}$ = ٨

لكن أ + ب = ١٣ ⟵ ٨ + ب = ١٣ ⟵ ب = ٥

$\frac{١٣ س - ٢٧}{س^٢ - ٣ س - ٤} = \frac{٨}{س + ١} + \frac{٥}{س - ٤}$ وبهذه الطريقة تمت تجزئة الكسر الجبري الى رقمين أو أكثر حسب عوامل المقام.

ملحوظة يمكن الاستفادة منها:

يمكن اجراء عملية التجزئة بطريقة أخرى دون اللجوء الى المعادلتين كما يلي:

بما أن $\frac{١٣ س - ٢٧}{س^٢ - ٣ س - ٤} = \frac{١٣ س - ٢٧}{(س + ١) (س - ٤)} = \frac{أ}{س + ١} + \frac{ب}{س - ٤}$

فإن $\frac{١٣ س - ٢٧}{س^٢ - ٣ س - ٤} = \frac{أ (س - ٤) + ب (س + ١)}{(س + ١) (س - ٤)}$

ومنها ١٣ س - ٢٧ = أ (س - ٤) + ب (س + ١)

لإيجاد قيمة أ نقدم ب (بجعل س + ١ = صفر ⟵ س = - ١)

∴ ١٣ (- ١) - ٢٧ = أ (س - ٤) + ب (- ١ + ١)

- ٤٠ = - ٥ أ ⟵ أ = ٨

لإيجاد قيمة ب نقدم أ (بجعل س - ٤ = صفر ⟵ س = ٤)

∴ ١٣ (٤) - ٢٧ = أ (٤ - ٤) + ب (٤ + ١)

٢٥ = ٥ ب ⟵ ب = ٥ ثم نكمل..

ملحوظة أخرى:

وسنقصر عملية التجزئة التي نحن بصددها على الاقترانات النسبية والكسور الجبرية التي مقاماتها تُحلل الى عوامل أولية خطية فقط.

مثال:

جزئ الاقتران النسبي ق (س) = $\frac{١١ س - ٧}{س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س - ٦}$ الى اقترانات أخرى.

$\frac{١١ س - ٧}{س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س - ٦} = \frac{١١ س - ٧}{(س + ١) (س - ٢) (س + ٣)}$ بعد تحليل المقام الى عوامل خطية باستخدام نظرية العوامل والقسمة.

∴ $\frac{١١ س - ٧}{س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س - ٦} = \frac{أ}{س + ١} + \frac{ب}{س - ٢} + \frac{جـ}{س + ٣}$ كون عدد عوامل المقام هو ٣

أي أن:

$\frac{١١ س - ٧}{س^٣ - ٢ س^٢ - ٥ س - ٦} = \frac{أ(س - ٢) (س + ٣) + ب(س + ١) + جـ(س + ١) (س - ٢)}{(س + ١) (س - ٢) (س + ٣)}$

لإيجاد قيمة ب نفرض س = ٢ لعدم أ ، جـ معاً

١١ (٢) - ٧ = أ (٢ - ٢) (٢ + ٣) + ب (٢ + ١) (٢ + ٣) + جـ (٢ + ١) (٢ - ٢)

$22 - 7 = 15$ ب

$15 = 15$ ب $\longrightarrow$ ب $= 1$

لإيجاد قيمة أ نفرض س = -1 لعدم ب ، جـ معاً

أي أن $11(-1) - 7 =$ أ $(-3)(2)$ – صفر + صفر كما مرّ أعلاه.

$-18 = -6$ أ $\longleftarrow$ أ $= 3$

لإيجاد قيمة جـ نفرض س = -3 لعدم أ ، جـ معاً

أي أن $11(-3) - 7 =$ صفر + صفر + $5(-2)(-5)$

$-40 = 10$ جـ $\longleftarrow$ جـ $= -5$

$$\therefore \frac{11 س - 7}{س^3 - 2 س^2 - 5 س - 6} = \frac{أ}{س + 1} + \frac{ب}{س - 2} - \frac{جـ}{س + 3}$$

مثال:

جزئ الاقتران النسبي $\frac{س^2 + 1}{س^2 - 1}$

بما أن درجة البسط = درجة المقام

فإننا نجري عملية القسمة الطويلة فقط أولاً لتصبح درجة البسط أقل من درجة المقام كما في (الشرط السابق) هكذا:

$$\begin{array}{r|l} 1 & \\ \hline س^2 + 1 & س^2 - 1 \\ \mp س^2 \pm 1 & \\ \hline 2 & \end{array}$$

$\therefore \frac{س^2 + 1}{س^2 - 1} = 1 + \frac{2}{س^2 - 1}$ والآن نجزئ الكسر $\frac{2}{س^2 - 1}$ هكذا:

$$\frac{2}{س^2 - 1} = \frac{2}{(س + 1)(س - 1)} = \frac{أ}{س + 1} + \frac{ب}{س - 1}$$

أي أن $\frac{2}{س^2 - 1} = \frac{أ(س - 1) + ب(س + 1)}{(س + 1)(س - 1)}$

$\therefore$ ٢ = أ (س − ١) + ب (س + ١)

لإيجاد أ نعدم ب بوضع س = − ١

٢ = أ (− ١ − ١) + صفر ← ٢ = − ٢ أ ← أ = − ١

لإيجاد ب نعدم أ بوضع س = ١

٢ = ب (١ + ١) = ٢ ب ← ب = ١

$\therefore \frac{س^٢ + ١}{س^٢ - ١} = ١ - \frac{١}{س^٢ - ١} + \frac{١}{س - ١}$

مثال:

جزئ الاقتران النسبي $\frac{س^٣ - س^٢ - ٢ س + ١}{س^٢ - س - ٢}$

بما أن درجة البسط أكبر من درجة المقام فإننا نجري القسمة الطويلة لتصبح درجة البسط أقل من درجة المقام هكذا:

$$\begin{array}{r|l} س & \\ \hline س^٣ - س^٢ - ٢س + ١ & س^٢ - س - ٢ \\ \mp س^٣ \pm س^٢ \pm ٢س & \\ \hline + ١ & \end{array}$$

$\therefore \frac{س^٣ - س^٢ - ٢ س + ١}{س^٢ - س - ٢} = س + \frac{١}{س^٢ - س - ٢}$ وتستمر بعملية التجزئة.

$\frac{١}{س^٢ - س - ٢} = \frac{١}{(س - ٢)(س + ١)} = \frac{أ}{س - ١} + \frac{ب}{س + ١}$

$\frac{١}{(س - ٢)(س + ١)} = \frac{أ (س + ١) + ب (س - ٢)}{(س - ٢)(س + ١)}$

١ = أ (س + ١) + ب (س − ٢)

لا مداه أ نضع س = ١

١ = ب (١ − ٢) ← ١ = − ١ ب ← ب = − ١

لا مداه ب نضع س = ٢

١ = أ (٢ + ١) ← ١ = ٣ أ ← أ = $\frac{١}{٣}$

أي أن $\frac{\text{س}^{٣} - \text{س}^{٢} - ٢\text{س} + ١}{\text{س}^{٢} - \text{س} - ٢} = \text{س} + \frac{\frac{١}{٣}}{\text{س} - ٢} + \frac{-١}{\text{س} + ١}$

$$= \text{س} + \frac{١}{٣(\text{س} - ٢)} - \frac{١}{\text{س} + ١}$$

مثال تطبيقي:

بركة سباحة مستطيلة الشكل بعداها ١٦ ، ١٢ م أحيطت بممر اسمنتي منتظم مساحته ١٢٨ متر مربع احسب طول ضلع الممر.

نفرض أن طول ضلع الممر = س متر

فطول البركة والممر= ١٦ + ٢ س متر

وعرض البركة والممر = ١٢ + ٢ س متر

وبما أن:

مساحة الممر = مساحة البركة والممر = مساحة البركة. فإن:

$١٢٨ = (١٦ + ٢\text{س})(١٢ + ٢\text{س}) - (١٦)(١٢)$

$١٢٨ = ١٩٢ + ٣٢\text{س} + ٢٤\text{س} + ٤\text{س}^{٢} - ١٩٢$

$$\frac{٤\text{س}^{٢} + ٥٦\text{س} - ١٢٨ = \text{صفر}}{٤}$$

$\text{س}^{٢} + ١٤\text{س} - ٣٢ = \text{صفر}$

$(\text{س} + ١٦)(\text{س} - ٢) = \text{صفر}$

س = − ١٦ جواب مرفوض حيث الطول لا يمكن أن يكون سالباً

س = ٢ متر عرض الممر.

التحقق: طول البركة والممر = ١٦ + ٢ (٢) = ٢٠ متر

عرض البركة والممر = ١٢ + ٢ (٢) = ١٦ متر

مساحة البركة والممر = (٢٠) (١٦) = ٣٢٠ متر مربع

مساحة الممر = مساحة البركة والممر – مساحة البركة

= ٣٢٠ - (١٦ × ١٢)

= ٣٢٠ – ١٩٢ = ١٢٨ متر مربع

وهو كما ورد في السؤال.

(٨ - ١٢) أمثلة محلولة على الاقترانات الجبرية

مثال (١):

إذا كان ق (س) = { س^٢ ، س ≤ ١ ؛ ٣ س - ٢ ، س < ١ }

أوجد ق (٢) ، ق (١) ، ق (- ١)

الحل:

ق (٢): نأخذ القاعدة ق (س) = س^٢ كون ٢ > ١

∴ ق (٢) = (٢)^٢ = ٤

ق (١): نأخذ القاعدة ق (س) = س^٢ كون ١ ≤ ١

ق (١) = (١)^٢ = ١

ق (- ١): نأخذ القاعدة ق (س) = ٣ س - ٢ كون - ١ < ١

ق (- ١) = ٣ (- ١) - ٢ = - ٣ - ٢ = - ٥

مثال (٢):

أي من الاقترانين ق$_1$(س) = ٢ — ٢ س

ق$_2$(٢) = س^٢ - ٤ س + ٥ واحد لواحد؛

الحل:

نمثل الاقترانين بيانياً ونستخدم اختيار الخط الأفقي هكذا:

ق$_1$ (س) = ٢ — ٢ س عندما س = صفر ، ق (٠) = ٢ - ٢ (٠) = ٢

وعندما ق (س) = ٠ ٢ — ٢ س = صفر

س = ١

س	٠	١
ق١	٢	٠

∴ ق١ (س) = ٢ – ٢ س اقتران واحد لواحد كون الخط الأفقي لا يقطع المنحنى إلا في نقطة واحدة.

ق٢ (س) = س^{٢} – ٤ س + ٥

لتمثيل الاقتران نجد احداثيات الرأس $\frac{-ب}{٢أ} = \frac{-(-٤)}{٢ \times ١} = \frac{٤}{٢} = ٢$

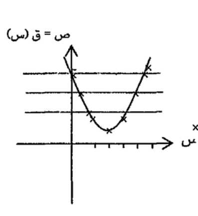
ثم نكون الجدول التالي:

ق (٠) = ق (٤) = (٠)^{٢} – ٤ (٠) + ٥ = ٥

ق (١) = (١)^{٢} – ٤ (١) + ٥ = ٢

ق (٢) = (٢)^{٢} – ٤ (٢) + ٥ = ١

س	٠	١	٢	٣	٤
ق٢ (س)	٥	٢	١	٢	٥



ق٢ (س) = س^{٢} – ٤ س + ٥ ليس اقتران واحد لواحد كون الخط الأفقي يقطع المنحنى أكثر من نقطة.

مثال (٣):

أعد تعريف الاقتران | ٤ س − س^{٢} | دون استخدام بقية القيمة المطلقة.

نجد اشارة ٤ س − س^{٢} هكذا:

هنا: س (٤ − س^{٢}) = صفر

س (٢ − س) (٢ + س) = صفر

أصفاره − ٢ ، صفر ، ٢

يضرب بسالب ++++ ‏ ‏+++++++ ‏ ‏++++ يضرب بسالب

− ∞ ‏ نفي (سالب) ‏ − ٢ ‏ عكس اشارة أ معامل س^{١} ‏ ٢ ‏ نفي (سالب) ‏ ∞

| ٤ س − س^{٢} | = ‏
- − (٤ س − س^{٢}) ، س < ٠
- ٤ س − س^{٢} ، ٠ ≤ س < ٤
- − (٤ س − س^{٢}) ، س ≥ ٤

= ‏
- س^{٢} − ٤ س ، س < ٠
- ٤ س − س^{٢} ، ٠ ≤ س < ٤
- س^{٢} − ٤ س ، س ≥ ٤

مثال (٤):

إذا كان ق (س) = س / (س − ١) ، س ≠ ١

هـ (س) = س / (س + ١) ، س ≠ − ١

أوجد (ق ٥ هـ) (س) ، (هـ ٥ ق) (س)

الحل:

$$(\text{ق} \circ \text{هـ})(\text{س}) = \text{ق}\,(\text{هـ}\,(\text{س})) = \text{ق}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\right) = \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+1}}{\frac{\text{س}}{\text{س}+1} - \frac{1}{1}}$$

$$= \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+1}}{\frac{\text{س} - (\text{س}+1)}{(\text{س}+1)(1)}} = \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}+1}}{\frac{\text{س} - \text{س} - 1}{\text{س}+1}} = \frac{\text{س}}{-1} = -\,\text{س}$$

مجاله: ح

$$(\text{هـ} \circ \text{ق})(\text{س}) = \text{هـ}\,(\text{ق}\,(\text{س})) = \text{هـ}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}-1}\right)$$

$$= \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}-1}}{\frac{\text{س}}{\text{س}-1} + \frac{1}{1}} = \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}-1}}{\frac{\text{س} + (\text{س}-1)}{(\text{س}-1)}} = \frac{\frac{\text{س}}{\text{س}-1}}{\frac{\text{س}+\text{س}-1}{\text{س}-1}} = \frac{\text{س}}{2\text{س}-1}$$

مجاله: $\text{ح} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$

مثال (٥):

إذا كان ق (س) = $\frac{1}{\text{س}}$ ، س ≠ صفر

أوجد ق^{-1} (س) الاقتران العكسي.

الطريقة الأولى: $(\text{ق} \circ \text{ق}^{-1})(\text{س}) = \text{س}$

$$\text{ق}\,(\text{ق}^{-1}(\text{س})) = \text{س}$$

$$\frac{1}{\text{ق}^{-1}(\text{س})} = \frac{\text{س}}{1}$$

$\text{س} - \text{ق}^{-1}(\text{س}) = \frac{1}{\text{س}}$ وهو نفسه ق (س)

الطريقة الثانية: نضع ص = $\frac{1}{\text{س}}$ ونجد س بدلالة ص

$$\text{س ص} = 1$$

$س = \frac{1}{ص}$ تغير المسميات ص بـ س هكذا:

$ص = \frac{1}{س}$

∴ $ق^{-1}(س) = \frac{1}{س}$ نفس الجواب.

مجاله: ح

مثال (٦):

أوجد باقي قسمة ق (س) = $س^3 - س^2 + 3$ على كلٍ من الاقترانات:

(١) هـ (س) = س - ١ (٢) ٢ س - ١ (٣) $س^2 - 1$

الحل:

(i) س - ١ = صفر ⟵ س = ١

∴ الباقي ق (١) = $(1)^3 - (1)^2 + 3 = 1 - 1 + 3 = 3$

(ii) ٢ س - ١ = صفر ⟵ $س = \frac{1}{2}$

∴ الباقي $ق\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + 3$

$= \frac{4 - 8}{32} + 3 = \frac{-4}{32} + \frac{3}{1} = \frac{-4 + 96}{32}$

$= \frac{92}{32} = \frac{46}{16} = \frac{23}{8}$

(iii) أما باقي قسمة ق (س) على $س^2 - 1$ فلن نجده بنظرية الباقي كون المقسوم عليه ليس اقتران خط على الصورة <u>س - أ</u> فيجب اجراء القسمة الطويلة هكذا:

$$\begin{array}{r|l} & س - 1 \\ \hline س^2 - 1 & س^3 - س^2 + 3 \\ & \mp س^3 \pm س \\ \hline & -س^2 + س + 3 \\ & \pm س^2 \mp 1 \\ \hline & س + 4 \end{array}$$

الباقي = س + ٤

ودرجته أقل من درجة المقسوم عليه بدرجة.

مثال (٧):

ما قيمة العدد الحقيقي ك التي تجعل هـ (س) = س + ٣ عاملاً من عوامل ق (س) = ٢ س^{٣} + ك س^{٢} − ٣ ك س + ٩٠ ؟

الحل:

نجد أولاً صفر هـ (س) هكذا: س + ٣ = صفر ⟵ س = − ٣

والآن ليكون هـ (س) عاملاً من عوامل ق (س) يجب أن يكون ق (− ٣) = صفر

ق (− ٣) = ٢ (− ٣)^{٣} + ك (− ٣)^{٢} − ٣ ك (− ٣) + ٩٠ = صفر

− ٥٤ + ٩ : + ٩ ك + ٩٠ = صفر

١٨ ك + ٣٦ = صفر

− ٣٦ − ٣٦

١٨ ك = − ٣٦

ك = $\frac{-٣٦}{١٨}$ = − ٢

مثال (٨):

إذا كان ق (س) = ٣ س^{٢} − ٥ ، فما قيم س التي تجعل ق (س) = ٤٣ ؟

٣ س^{٢} − ٥ = ٤٣

+ ٥ + ٥

$\frac{٣ س^{٢}}{٣}$ = $\frac{٤٨}{٣}$

س^{٢} = ١٦

س = ± $\sqrt{١٦}$ = − ٤ ، ٤

∴ قيم س = { − ٤ ، ٤ }

مثال (٩):

مصنع للسجاد يُنتج س سجادة يومياً بقياس معين، تكلفتها الكلية تساوي (٣٠ س + ٣٥) ديناراً، ويبيع السجادة الواحدة بمبلغ ٧٥ ديناراً، ما قيمة ربح المصنع بالدينار إذا باع في أحد الأيام ١٢ سجادة؟

بما أن الربح = الايراد – التكاليف

فإن ق (س) = (س × ٧٥) – (٣٠ س + ٣٥)

ومنها ق (س) = ٧٥ س – ٣٠ س – ٣٥ = ٧٥ س – ٣٠ س – ٣٥

∴ ق (س) = ٤٠ س - ٣٥

∴ الربح = ق (١٢) = (١٢) (٤٠) - ٣٥

= ٤٨٠ - ٣٥ = ٤٤٥ دينار

مثال (١٠):

اكتب قاعدة ق (س) كثير الحدود من الدرجة الثانية (تربيعي) إذا علمت أن ق (١) = صفر ، ق (-١) = ٦ ، ق (٠) = ٢

القاعدة العامة: ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ . أ ≠ صفر

والآن: ق (١) = أ (١)^{٢} + ب (١) + جـ = صفر

أي أن أ + ب + جـ = صفر (١)

وكذلك: ق (-١) = أ (-١)^{٢} + ب (-١) + جـ = ٦

أي أن أ – ب + جـ = ٦ (٢)

وكذلك ق (٠) = أ (٠)^{٢} + ب (٠) + جـ = ٢

أي أن جـ = ٢ (٣)

وهكذا لدينا النظام من المعادلات:

أ + ب + ٢ = صفر

أ + ب = - ٢ (٤)

وكذلك: أ – ب + ٢ = ٦

∴ أ – ب = ٤ (٥)

أ + ب = - ٢ (٤)

جمعاً أ - ب = ٤ (٥)

٢ أ = ٢

أ = ١

لكن أ + ب = - ٢ ⟵ ١ + ب = - ٢ ⟵ ب = - ٣

∴ ق (س) = ١ س٢ – ٣ س + ٢ وهو كما ترى اقتران تربيعي.

مثال (١١):

إذا كان ق (س) = ٣ س٢ + ٦ س - ٢

هـ (س) = - ٣ س٢ + ٤ س - ٥

ما درجة كل من الاقترانات التالية:

(ق + هـ) (س) ، (ق – هـ) (س) ، (ق ، هـ) (س)

(ق + هـ) (س) = (٣ س٢ + ٦ س - ٢) + (- ٣ س٢ + ٤ س - ٥)

= ٣ س٢ + ٦ س - ٢ - ٣ س٢ + ٤ س - ٥

= ١٠ س - ٧ ومن الدرجة الأولى.

(ق – هـ) (س) = (٣ س٢ + ٦ س - ٢) – (- ٣ س٢ + ٤ س - ٥)

= ٣ س٢ + ٦ س – ٢ + ٣ س٢ – ٤ س + ٥

= ٦ س٢ + ٢ س + ٣ ومن الدرجة الثانية

(ق – هـ) (س) = (٣ س^{٢} + ٦ س – ٢) (– ٣ س^{٢} + ٤ س – ٥) بقانون التوزيع

= – ٩ س^{٤} + ١٢ س^{٣} – ١٥ س^{٢} – ١٨ س^{٣} + ٢٤ س^{٤} – ٣٠ س + ٦ س^{٢} – ٨ س + ١٠

= – ٩ س^{٤} – ٦ س^{٣} + ١٥ س^{٢} – ٣٨ س + ١٠ ومن الدرجة الرابعة

مثال (١٢):

أوجد مجموعة الحل للمعادلة س^{٥} – ٢٥٦ س = صفر في حقل الأعداد الحقيقية.

س^{٥} – ٢٥٦ س = صفر اخراج س كعامل مشترك

س (س^{٤} – ٢٥٦) = صفر تحليل الفرق بين مربعين

س (س^{٢} – ١٦) (س^{٢} + ١٦) = صفر

س = صفر

س + ٤ = صفر ⟵ س = – ٤

س – ٤ = صفر ⟵ س = ٤

س^{٢} + ١٦ = صفر مميزها ب^{٢} – ٤ أ جـ = (٠)^{٢} – ٤ × ١ × ١٦ = – ٦٤ < صفر

ليس لها جذور في حقل الأعداد الحقيقية.

مجموعة الحل= {– ٤ ، ٠ ، ٤} جذور حقيقية والباقي في حقل الأعداد المركبة كما سيأتي:

مثال (١٣):

اكتب قاعدة الاقتران الممثل منحناه بالشكل.

منحنى الاقتران تكون من ثلاثة أجزاء

ب جـ يمثل ك (س) = ١ س ≥ ـ ١ .٠

ب أ يمثل ل (س) = – س – ١ ≥ س ≥ ٠

أ د يمثل هـ (س) = س س ≥ .٠

وعند جمعها باقتران واحد متشعب يكون ق (س):

$$ق(س) = \begin{cases} ١ & ، \quad س \leq -١ \\ -س & ، \quad -١ \leq س \leq ٠ \\ س & ، \quad ٠ \leq س \end{cases}$$

مثال (١٣):

طُلب من أحد البنائين اكمال سور من الحجر، فوجد أنه تم بناء ٨٥ حجراً قبل أن يبدأ بالعمل به، فإذا قام هذا البناء ببناء ٣٥ حجراً يومياً حتى اكتمل بناء السور خلال سبعة أيام، والمطلوب اكمال الجدول التالي، ثم كتابة قاعدة النمط التي تبين عدد الحجارة المبنية في السور كاقتران في المتغير س.

أيام العمل	عدد الحجارة بعد البناء	مجموع الحجارة التي بنيت
١	٨٥ + ١ (٣٥)	١٢٠
٢	٨٥ + ٢ (٣٥)	١٥٥
٣	٨٥ + ٣ (٣٥)	١٩٠
٤	٨٥ + ٤ (٣٥)	٢٢٥
٥	٨٥ + ٥ (٣٥)	٢٦٠
٦	٨٥ + ٦ (٣٥)	٢٩٥
٧	٨٥ + ٧ (٣٥)	٣٣٠
⋮		
س	٨٥ + س (٣٥)	٣٥ س + ٨٥

∴ ق (س) = ٣٥ س + ٨٥ وهذا الاقتران ناتج النمط السابق.

مثال (١٤):

ما مجال كل من الاقترانات التالية:

(i) $ق(س) = \begin{cases} س^٢ + ١ & ، \quad س \leq ١ \\ ٥ - س & ، \quad ١ < س \end{cases}$

الحل:

مجال القاعدة الأولى (- ∞ ، ١]

ومجال القاعدة الثانية (١ ، ∞)

∴ مجال الاقتران = (- ∞ ، ١] ∪ (١ ، ∞) = (- ∞ ، ∞) = ح

كما في الشكل

∞ - ⟵⟶ ∞

الجواب: المجال ح

(ii) ق (س) = $\frac{٢}{٢ - س}$

نستثني أصفار المقام من ح هكذا:

٢ – س ≠ صفر

- ٢   - ٢

- س ≠ - ٢

س ≠ ٢

فالجواب: مجال الاقتران = ح – {٢} أو س ≠ ٢

(iii) ق (س) = $\frac{٢ س + ١}{س^{٢} - س - ٦}$

نستثني أصفار المقام من ح هكذا:

س^{٢} – س – ٦ ≠ صفر

(س - ٣) (س + ٢) ≠ صفر

س ≠ - ٢ ، ٣

الجواب: مجال الاقتران = ح – {- ٢ ، ٣} أو س ≠ {- ٢ ، ٣}

(iv) ق (س) = $\sqrt{\text{س} - ١}$

إذا كان دليل الجذر زوجياً فإن ما بداخله يجب أن يكون موجباً أو صفراً

أي: س - ١ ≠ صفر

س ≠ ١

الجواب: مجال الاقتران = [١ ، ∞)

(v) ق (س) = $\sqrt{٤ - \text{س}}$

٤ - س ≤ صفر

- ١ (- س ≤ - ٤)

س ≥ ٤ (انعكست اشارة الترتيب أو التباين لأننا ضربنا بكمية سالبة)

الجواب: مجال الاقتران = (- ∞ ، ٤]

(vi) ق (س) = $\frac{٥}{\sqrt{٢\text{س} - ٣}}$

بما أن الجذر في المقام فيجب أن يكون ما بداخله موجباً فقط (ليس صفراً وليس سالباً) هكذا:

٢ س - ٣ > صفر

$\frac{٢\text{س}}{٢} > \frac{٣}{٢}$ ⟵ س > $\frac{٢}{٣}$

الجواب: مجال الاقتران = ($\frac{٢}{٣}$ ، ∞)

(vii) ق (س) = $\frac{\sqrt{\text{س} + ٢}}{\text{س} - ١}$

نستثني من ح أصفار المقام ونجد مجال البسط أيضاً هكذا:

مجال البسط: س + ٢ ≤ صفر ، س ≤ - ٢

مجال المقام = س = ١

مجال الاقتران = [- ٢ ، ∞) - {١}

∞ - ٢- ١ ∞

مثال (١٥):

إذا كان ق (س) = س^{٢} + س - ١

هـ (س) = س^{٢} — س + ١

أوجد: (i) (ق + هـ) (١)

الحل: (ق + هـ) (١) = ق (١) + هـ (١) = ((١)^{٢} + ١ - ١) + ((١)^{٢} - ١ + ١)

= (١ + ١ - ١) + (١ - ١ + ١)

= (١) + (١) = ٢

أو نجد: (ق + هـ) (س) = (س^{٢} + س - ١) + (س^{٢} — س - ١) = ٢ س^{٢}

ونعوض بدل س = ١ هكذا (ق + هـ) (١) = ٢ (١)^{٢} = ٢ (١) = ٢

(ii) (ق — هـ) (١) = ق (١) — هـ (١) = (١^{٢} + ١ - ١) — (١^{٢} — ١ + ١)

= (١ + ١ - ١) — (١ - ١ + ١)

= (١) — (١) = صفر

أو نجد: (ق — هـ) (س) = (س^{٢} + س - ١) — (س^{٢} — س + ١)

= س^{٢} + س - ١ — س^{٢} + س - ١

ونعوض بدل س = ١ هكذا: (ق — هـ) (١) = ٢ (١) - ٢ = ٢ - ٢ = صفر

(iii) (ق ・ هـ) (١) = ق (١) ・ هـ (١) = (١^{٢} + ١ - ١) (١^{٢} - ١ + ١)

= (١ + ١ - ١) (١ - ١ + ١)

= (١) (١) = ١

أو نجد (ق ・ هـ) (س) = (س^{٢} + س - ١) (س^{٢} — س + ١) قانون التوزيع

= س^{٤} — س^{٣} + س^{٢} + س^{٣} — س^{٢} + س — س^{٢} + س - ١

= س^{٤} — س^{٢} + ٢ س - ١

ونعوض بدل س = ١ هكذا (ق · هـ) (١) = $١^{٤} - ١^{٢} + ٢(١) - ١$

$= ١ - ١ + ٢ - ١ = ١$

(iv) (ق ÷ هـ) (١)

$$= \frac{\text{ق}(١)}{\text{هـ}(١)} = \frac{١^{٢} + ١ - ١}{١^{٢} - ١ + ١} = \frac{١ + ١ - ١}{١ - ١ + ١} = ١$$

أو لنقسم ق (س) على هـ (س) كما يلي:

$$\begin{array}{r|l} ١ & \\ \hline \text{س}^{٢} + \text{س} - ١ & \text{س}^{٢} - \text{س} + ١ \\ \mp \text{س}^{٢} \pm \text{س} \mp ١ & \\ \hline ٢\text{س} - ٢ & \end{array}$$

فإن (ق ÷ هـ) (س) = $١ + \frac{٢\text{س} - ٢}{\text{س}^{٢} - \text{س} + ١}$

(ق ÷ هـ) (١) = $١ + \frac{٢(١) - ٢}{١ - ١ + ١} = ١ + \frac{\text{صفر}}{١}$

$= ١$

مثال (١٦):

حل المعادلة: $|٢\text{س} - ١| = |١ - ٥\text{س}|$

بعد ازالة رموز القيمة المطلقة:

فإن (٢ س − ١) = ± (١ − ٥ س)

أي ٢ س − ١ = ١ (١ − ٥ س) ، ٢ س − ١ = − (١ − ٥ س)

أي أن ٢ س − ١ = ١ − ٥ س ، ٢ س − ١ = − ١ + ٥ س

٢ س + ٥ س = ١ + ١ ، ٢ س − ٥ س = − ١ + ١

٧ س = ٢ ، − ٣ س = صفر

س = $\frac{٢}{٧}$ ، س = صفر

مجموعة الحل: { صفر ، $\frac{٢}{٧}$ }

مثال (١٧):

ما قيمة أ ، ب إذا كان

٥ س — ٢ س — ١ = أ (س^{٢} — ٥ س + ٦) + ب (س^{٢} — ٤ س + ٣) + ١٩ (س^{٢} — ٣ س + ٢)

بما أن الطرفين متساويين، وبما أنها كثيراً حدود من الدرجة الثانية، فسوف نبسط الطرف الأيسر هكذا:

٥ س^{٢} — ٢ س — ١ = أ س^{٢} — ٥ أ س + ٦ أ + ب س^{٢} — ٤ ب س + ٣ ب + ١٩ س^{٢} — ٥٧ س + ٣٨

=

٥ س^{٢} — ٢ س — ١ = أ س^{٢} — ب س^{٢} + ١٩ س^{٢} — ٥ أ س - ٤ ب س - ٥٧ س + ٦ أ + ب س + ٣٨

فإن المعاملات المتناظرة متساوية ومنها:

٥ = أ + ب + ١٩ (١)

- ٢ = - ٥ أ - ٤ ب - ٥٧ (٢)

- ١ = ٦ أ + ٣ ب + ٣٨ (٣) وبعد التبسيط

أ + ب = - ١٤ (١)

- ٥ أ — ٤ ب = ٥٥ (٢)

٦ أ + ٣ ب = - ٣٩ (٣)

يكتب هنا المعادلتان ٤ \ أ + ب = - ١٤ (١) والحل بالحذف (لحذف ب)

- ٥ أ — ٤ س = ٥٥ (٢)

٤ أ + ٤ ب = - ٥٦ (١)

- ٥ أ — ٤ ب = ٥٥ (٢) جمعاً

- أ = - ١

أ = ١

مثال (١٨):

ما قيمة أ التي تجعل س = ٣ عاملاً من عوامل ق (س) = ٣ س^{٣} + أ س^{٢} + س

الحل:

حتى يكون س − ٣ عاملاً من عوامل ق (س) يجب أن يكون ق (٣) = صفر

وعليه ق (٣) = ٣ (٣)^{٣} + أ (٣)^{٢} + ٣ = صفر

= ٣ (٢٧) + أ (٩) + ٣ = صفر

٨١ + ٩ أ + ٣ = صفر

٩ أ = − ٨٤

أ = − $\frac{٨٤}{٩}$

مثال (١٩):

متى يكون الاقتران هـ (س) = س + أ عاملاً من عوامل ق (س) = س^{ن} − أ^{ن}

ن ∈ ط* ، أ ≠ صفر ؟

استنتج ذلك من الأمثلة العددية:

صفر الاقتران هـ (س) = س + أ = صفر ⟵ س = − أ

عندما ن = ١ ، س^{ن} − أ^{ن} = س − أ

ق (− أ) = − أ − أ = − ٢ أ ≠ صفر ⟵ س + أ ليس عاملاً من عوامل ق (س)

عندما ن = ٢ ، س^{ن} − أ^{ن} = س^{٢} − أ^{٢}

ق (− أ) = (− أ)^{٢} − (أ)^{٢} = أ^{٢} − أ^{٢} = صفر ⟵ س + أ عامل من عوامل ق (س)

عندما ن = ٣ ، س^{ن} − أ^{ن} = س^{٣} − أ^{٣}

ق (− أ) = (− أ)^{٣} = − أ^{٣} = − أ^{٣} − أ^{٣} = − ٢ أ^{٣} صفر ⟵ س + أ ليس عامل من عوامل ق (س)

لكن أ + ب = - ١٤

∴ ١ + ب = - ١٤

ب = - ١٥

للتحقق نأخذ المعادلة الثالثة:

٦ أ + ٣ ب = - ٣٩

٦ (١) + ٣ (- ١٥) =؟ - ٣٩

٦ — ٤٥ =؟ - ٣٩

نعم - ٣٩ = - ٣٩

∴ أ = ١

ب = - ١٥

مثال (٢٠):

اذا كان ق (س) = س^{٢} - ١

هـ (س) = س^{٣} - ٥

هل (١) ق (٢) = هـ (س)

وهل (٢) ق (س) = هـ (س) ولماذا؟

ق (٢) = (٢)^{٢} - ١ = ٤ - ١ = ٣

هـ (٢) = (٢)^{٣} - ٥ = ٨ - ٥ = ٣

∴ ق (٢) = هـ (٢)

لكن ق (س) $\neq$ هـ (س) باختلافهما بالدرجة

والبيان ق (٥) = $٥^٢$ - ١ = ٢٥ - ١ =٢٤

هـ (٥) = $٥^٣$ - ٥ = ١٢٥ - ٥ = ١٢٠

وعليه فإن ق (٥) ≠ هـ (٥) وبشكل عام فإن ق (س) ≠ هـ (س)

ولكن ق (٢) = هـ (٢) كان حالة خاصة فقط.

عندما ن = ٤ ، $س^ن$ - $أ^ن$ = $س^٤$ - $أ^٤$

ق (- أ) = (- أ)^٤ - $أ^٤$ = $أ^٤$ - $أ^٤$ = صفر ← س + أ عامل من عوامل ق (س)

⋮

وعلى نفس النمط إذا أكملنا الحل فإننا نستنتج أن:

هـ (س) = س + أ عامل من عوامل ق (س) = $س^ن$ - $أ^ن$ عندما ن عدد طبيعي زوجي

إن هـ (س) = س + أ ليس عامل من عوامل ق (س) = $س^ن$ - $أ^ن$ عندما ن عدد طبيعي فردي.

(٨ - ١٣) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) ما العلاقة بين أ ، ب التي تجعل كثير الحدود:

ق (س) = ٢ س^{٤} – ٧ س^{٣} + أ س + ب يقبل القسمة على هـ (س) = س – ٣

{ارشاد: ق (٣) = صفر}

(٢) حل المعادلة ٤ س^{٣} - ٢٤ س^{٢} + ٢٣ س + ١٨ = صفر

{ - $\frac{١}{٢}$ ، ٢ ، ٩ }

{ ارشاد: استعن بنظرية العوامل والقسمة والتركيبية }

(٣) حلل كثير الحدود:

ق (س) = ٢ س^{٣} – ٧ س^{٢} – ٣ س + ١٨ الى عوامله الأولية

{ (س - ٢) (س - ٣) (٢ س + ٣) }

(٤) إذا كان ق (س) = س^{٢} - ٣ س + ١

هـ (س) = ٢ س

ل (س) = س - ٢

أوجد (ق ٠ هـ ٠ ل) (س)

{ ٤ س^{٢} – ٢٢ س + ٢٩ }

(٥) إذا كان ق (س) = س + ١ ، هـ (س) = $\frac{١}{س}$

أوجد (هـ ٥ ق) (س)

{ $\frac{س + ١}{س}$ }

(٦) حلل الاقتران ق (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} - ١٣ س - ١٥ الى عوامله الأولية.

{(س - ٣) (س + ١) (س + ٥)}

{ ارشاد : استعن بنظرية الباقي والقسمة }

(٧) أوجد باقي قسمة ق (س) = س^{٤} - ٢ س^{٣} + س - ٧ على هـ (س) = س + ٢

{ ٢٣ }

(٨) ما باقي قسمة ق (س) = س^{٤} - ٣ س^{٣} ص + ٢ س^{٢} ص^{٢} - ص^{٤}

على هـ (س) = س^{٢} - س ص + ٢ ص^{٢}

{ ارشاد : استعن بالقسمة الطويلة }

(٩) ما خارج قسمة ق (س) = ٣ س^{٤} - ٥ س^{٣} + ٧ س^{٢} - ١١ س

على هـ (س) = ٣ س - ٢

(١٠) إذا كان ق (س) = س ، هـ (س) = س^{٢}

أوجد (i) (ق ٥ هـ) (س) (ii) (هـ ٥ ق) (س)

(iii) ماذا تستنتج؟ وكيف تفسر ذلك؟

{ارشاد : ق (س) = س اقتران محايد}

(١١) أوجد مجموعة الحل لكل من المعادلات:

(١) |س - ١| = ٢ { - ١ ، ٣ }

(٢) |س| = (|س|)^{٢} { - ١ ، ٠ ، ١ }

(٣) س + ٤ = س - ٤ { ٠ }

(١٢) اذا كان ق (س) = ٢ س^٥ - ٩ س^٣ + س^٢ + ٩ س - ٣

هـ (س) = س^٢ - ٣

أوجد $\left(\frac{ق}{هـ}\right)$ (١) { صفر }

(١٣) إذا كان ق (س) = س^٤ + س^٢ أوجد:

ق (١) ، ق (٢) ، ق ($\sqrt{٣}$) ، ق (٠) ، ق (- ١)

(١٤) إذا كان ق (س) = س^٢ + س + ١ ، هـ (س) = س^٢ — س - ١

أوجد (ق + هـ) (٥) (ق — هـ) (٥)

(ق · هـ) (٥)

(١٥) اذا كانت ق (س) = $\frac{س}{١ - س}$ ، س ≠ ١

هـ (س) = $\frac{س}{١ + س}$ ، س ≠ - ١

أوجد (ق ٥ هـ) (س) ، (هـ ٥ ق) (س)

{ س ، س }

(١٦) حلل الاقتران ق (س) = س^٣ — س^٢ — ٤ س + ٤ إلى عوامله

{ (س - ٢) (س - ١) (س + ٢) }

وكذلك الاقتران ق (س) = س^٣ + ٢ س + ٣

{ (س + ١) (س^٢ — س + ٣) }

ثم كذلك الاقتران ق (س) = س^٤ + ٤

{(س^٢ — ٢ س + ٢) (س^٢ + ٢ س +٢) }

{ ارشاد : استعن باكمال المربع }

(١٧) إذا كان ق (س) = ٣ س^٣ + ١ ، هـ (س) = ٢ س^٢ + ١

أوجد (ق ∘ هـ) (س) ، (ق/هـ) (س) ومجال كل منهما.

(١٨) اذا كان ق (س) = (س - ١)/(س^٢ + ٤) فما قيمة ق (٢)؟

{ ١/٨ }

(١٩) أوجد مجال كلاً من الاقترانات التالية:

(١) ق (س) = √(س^٢ + ٤) ، ح = (- ∞ ، ∞)

(٢) ق (س) = (٢ س - ٨)/(س^٢ - ١٦) ، ح - {± ٤}

(٢٠) إذا كان ق (س) = س^٣ + ٣ س + ١

هـ (س) = س^٢ + ٢ س + ١

أوجد (ق + هـ) (١) ، (ق – هـ) (١)

{ ٩ ، ١ }

(٢١) أوجد مجال الاقتران ق (س) = (س^٢ + س - ٢)/(س^٢ + ٥ س - ٦)

{ح - {- ٦ ، ١}}

(٢٢) اذا كان ق (س) = ١ – س + س^٢ ، ضع أحد الرموز > ، < ، = داخل الدائرة في العبارة ق (- ١) ◯ ق (٠) لتصلح صواب.

(٢٣) أوجد الأصفار الحقيقية للاقترانات الحقيقية التالية:

(١) ق (س)= س^٢ + ٦س { - ٦ ، ٠ }

(٢) ق (س) = س^٢ – ٤ س - ٥ { - ١ ، ٥ }

(٣) ق (س) = ٣ س^٢ + ٢ س + ١ { لا يوجد أصفار حقيقية كون ب٢ - ٤ أ جـ < صفر }

(٢٤) إذا كان ق (س) = $\sqrt{٤ - س^٢}$ ، هـ (س) = $\sqrt{س - ١}$

أوجد مجال ل (س) = ق (س) ・ هـ (س) { [-٢ ، ٢] }

{ ارشاد : مجال ل (س) = مجال ق (س) ∩ مجال هـ (س) }

(٢٥) إذا كان ق (س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر ، هـ (س) = $\sqrt{س}$ ، س ≥ صفر

أوجد مجال ل (س)= ق (س) + هـ (س) { س > صفر }

{ ارشاد : مجال ل (س) = مجال ق (س) ∩ مجال هـ (س)

(٢٦) إذا كان ق (س) = س + ٥ ، هـ (س) = ٤ س^٢ - ١

أوجد مجال ق (س) ÷هـ (س) { ح - {-$\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٢}$} }

{ ارشاد : مجال ل (س) = مجال ق (س) ∩ مجال هـ (س) }

(٢٧) إذا كان ق (س) = $\frac{س}{س - ١}$ بيّن أن (ق ٥ ق) (س) = س

(٢٨) اذا كان ق (س) = ٢ س^٢ + س - ٤ ، هـ (س) = ٣ - س^٢

أوجد: (١) (ق + هـ) (- ١) {- ١}

(٢) (ق ・ هـ) ($\frac{١}{٢}$) { - $\frac{٣٣}{٤}$ }

(٣) (ق ٥ هـ) (١) { ٦ }

(٢٩) اذا كان اقتران الايراد د (س) = ٥ س^٢ - $\frac{س^٤}{١٠}$ ، واقتران التكلفة ك (س) = ٤ س^٢ - ٢٤ س + ٣٨ وكان اقتران الربح د (س) = د (س) - ك (س)

أوجد: د (١) ، د (٢) وصنّف النواتج الى مكسب أو خسارة.

{خسارة ١٣.١ ، مكسب ١٢.٤ }

(٣٠) أوجد مجال الاقتران ق (س) = $\frac{\sqrt{٣ + س} - \sqrt{٣}}{س}$ ، س ≠ صفر

{ ارشاد : مجال الاقتران= مجال البسط ∩ مجال المقام }

{ [-٣ ، صفر) ، (صفر، ∞) }

(٣١) أوجد مجال الاقتران ق (س) = $\frac{\sqrt{س^٢ + ١}}{\sqrt{س^٢}}$ ، س ≠ صفر

(٣٢) أوجد مجال الاقتران ق (س)= $\begin{cases} ٢ س ، & -٤ \leq س \leq -١ \\ ٣ ، & ٠ < س < ٦ \end{cases}$

{ [-٤ ، -١] ∪ (٠ ، ٦) }

(٣٣) أوجد مدى كل من الاقترانات:

(١) ق (س) = -١ المدى = {-١}

(٢) ق (س) = ٣ س - ٢ لكل س < ٤

المدى = (-∞ ، ١٠]

(٣٤) إذا كان ق (س) = س^٢ + ١ ، هـ (س) = س^٢ - ١

أوجد (ق ٥ هـ) (-١) ، (هـ ٥ ق) (-١) { ١ ، ٣ }

(٣٥) ما قيمة العدد أ إذا كان ق (س) = س^٢ – أ س + ٣ يقبل القسمة على

هـ (س) = س + ٣ دون باقٍ. {-٤}

(٣٦) ما قيم كل من أ ، ب ، جـ ، د ليكون الاقتران $ق_١$ (س) = الاقتران $ق_٢$ (س)

حيث $ق_١$ (س) = (أ + ٣) س^٣ + (٣ ب - ١) س^٢ + ٢

$ق_٢$ (س) = (ب - ٢) س^٣ + (أ + ٣) س^٢ + جـ س + د

{ $-\frac{١}{٢}$ ٥ ، $-\frac{١}{٢}$ ، ٣ ، ٢ }

{ ارشاد : تساوي المعاملات المتناظرة وتكوين معادلات جبرية}

(٣٧) حل المعادلة س^{٤} + ٢ س^{٣} - ٧ س^{٢} - ٨ س + ١٢ = صفر

{ - ٣ ، - ٢ ، ١ ، ٢ }

{ ارشاد : استعن بنظرية العوامل }

(٣٨) اذا علمت أن سرعة الصوت في الهواء تعتمد على درجة حرارته، وكما ورد في العلاقة التالية:

ع = ١٠٩٠ + ١,١٤ (ف - ٣٢)

حيث ع سرعة الهواء وتقاس بـ قدم/ ث

ف درجة حرارة الهواء وتقاس بـ الدرجات الفهرنهاتية

احسب سرعة الصوت في الهواء وبدرجة ٩٨ فهرنهايت.

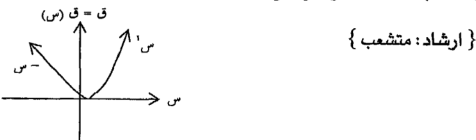
{ ٢٤ و ١١٦٥} قدم/ ث }

(٣٩) إذا كان الاقتران ق (س) = ١ + أ س + ب س^{٢} حيث أ ، ب ∈ ح وكانت النقط (٢ ، - ٧) ، (- ١ ، - ٤) تقع على منحناه.

أوجد قيمة كل من أ ، ب {٢ ، - ٣ }

(٤٠) اكتب قاعدة الاقتران ق (س) المُمثل منحناه بالشكل

{ ارشاد : متشعب }



(٤١) أعد تعريف الاقتران ق (س) = | ٢ س - ٣ | + ٥ ومثّله بيانياً على المستوى الديكارتي.

(٤٢) اعتمد على الشكل

والذي يمثل منحنى الاقتران

ق (س) = | أ س + ب | في ايجاد منحنى

أ ، ب {٢ ، - ٢}

{ارشاد: أعد تعريف ق (س) هكذا: $\begin{cases} \text{أ س + ب ، س} \geq ١ \\ \text{- أ س - ب ، س} < ١ \end{cases}$

(٤٣) أوجد مجموعة الحل للمتباينة ٢ < [س + ١] < ٤

{ [٢ ، ٣) }

{ ارشاد: [س + ١] = ٣ }

(٤٤) اذا كان ق (س) = ٣ س^{٢} + ٥ ، هـ (س) = $\begin{cases} \text{س + ١ ، س} \geq ٢ \\ \text{٧ ، س} < ٢ \end{cases}$

أوجد (ق ٥ هـ) (٠) ، (هـ ٥ ق) (٠)

{١٥٢ ، ٩ }

(٤٥) أيّ من الاقترانات التالية يمثل اقتران واحداً لواحد.

ق (س) = س^{٣} ، ق (س) = س^{٢} ، ق(س) = س ، ق (س) = ١

{ الأول والثالث }

(٤٦) إذا كان ق (س) = $\begin{cases} \text{|س| ، س} < -٥ \\ \text{[س] ، - ٥} \leq \text{س} < ٥ \\ \frac{١}{\text{س}} \text{ ، س} \geq ٥ \end{cases}$

أوجد قيمة ق (- ٥) ، ق (٥) ، ق (٠) ، ق (- $\frac{١}{٢}$) ، ق ($\frac{١}{٢}$) ، ق (- ٦)

{- ٥ ، $\frac{١}{٥}$ ، ٠ ، - ١ ، ٠ ، ٦ }

(٤٧) أعد تعريف كلاً من الاقترانات التالية:

(١) ق (س) = |س - ٢| + ١

(٢) ق (س) = ⟦٢ س + $\frac{١}{٢}$⟧ ، في الفترة [- $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{٩}{٤}$]

{ ارشاد: لتعريف نقطة البداية في الاقتران الثاني اجعله مساوياً للصفر }

(٤٨) أوجد خارج قسمة ق (س) = ٣ س^{٤} - ٥ س^{٣} + ٧ س^{٢} - ١١ س - ١٣

على هـ (س) = ٣ س - ٢

(٤٩) ما باقي قسمة ق (س) = س^{٧} - ١٠ س^{٦} + ٨ س^{٥} - ٧ س^{٣} + ٣ س - ١١

على هـ (س) = س^{٢} - ٥ س + ٤

{ ارشاد: قسمة طويلة }

(٥٠) ما باقي قسمة ق (س) = ٥ س^{٤} - ٧ س^{٣} + ٨ س^{٢} — س + ٨

على هـ (س) = س - ٤

{ ارشاد: ق (٤) }

(٥١) اذا كان ق (س) = $\frac{س^{٢} - ١}{٢ س + ١}$ ، هـ (س) = $\frac{س + ٣}{٣}$

ما مجال الاقتران $\frac{هـ}{ق}$ (س) { ح — { ٠ ، - ١ ، ١ } }

(٥٢) ما قيمة أ التي تجعل ق (س) = ٢ س^{٣} — س^{٢} + أ س - ٣ يقبل القسمة على

هـ (س) = ٢ س - ١ { ٦ }

(٥٣) ما درجة كثير الحدود ق (س) = (٣ س^{٢} —س) (س^{٣} + ٤)

{ الخامسة }

{ ارشاد: أوجد حاصل ضربه! }

(٥٤) القائمة أ القائمة ب

ق (س) = س^{٣} − ٤ س + ٢

هـ (س) = جـ

ل (س) = س^{٢} − ٤ + جـ

والمطلوب: صل بين قاعدة الاقتران

من القائمة أ مع منحناه

من القائمة ب

(٥٥) اذا كان ق (س) = س^{٣} + ٣ س^{٢} − ٦ س + ١

هـ (س) = س^{٢} − ٥ س + ٢

أوجد ناتج كل من (ق + هـ) (س) ، (ق − هـ) (س) ، (ق • هـ) (س)

(٥٦) رُسم مربع طول ضلعه س داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه على محيط الدائرة، اكتب الاقتران الذي يدل على المساحة المحصورة بين الدائرة والمربع.

(٥٧) اذا كان هـ (س) = س − ٢ عاملاً من عوامل ق (س) = س^{٣} + ٢ س^{٢} − أ س − ٢
أوجد قيمة أ. { ٧ }

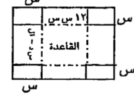
(٥٨) ما عرض سجادة بدلالة س إذا كانت مساحتها م (س) = ٢ س^{٢} + ٢٩ س + ٦٠
وطولها ط (س) = ٢ س + ٥

{ ارشاد: عملية قسمة طويلة أو تركيبية }

(٥٩) اكتب قاعدة الاقتران كثير الحدود من الدرجة الثانية التي من عوامله (س − ١)
(س + ٢) ، (س − ٤)

{ارشاد: حاصل ضرب العوامل أو نظرية الباقي }

(٦٠) يُراد عمل علبة حلويات للأطفال مفتوحة مساحتها ١٠٨ سم^{٢} من لوح مربع من الكرتون طول ضلعه ١٢ سم وذلك بقطع مربعات متساوية من أركانه الأربعة طول ضلع كل منها س سم وثني الأجزاء البارزة للأعلى كما في الشكل.



أوجد أبعاد العلبة (طولها وعرضها وارتفاعها)

{٦ ، ٦ ، ٣}

(٦١) حلل الاقترانات التالية الى عواملها الأولية:

(١) $ق_{١}$ (س) = س^{٢} - ٢ س - ٨

(٢) $ق_{٢}$ (س) = ٤ س^{٢} - ٣٦

(٣) $ق_{٣}$ (س) = ٢ س^{٣} - ١٦

(٤) $ق_{٤}$ (س) = س^{٣} - ٧ س - ٦

(٦٢) وجد صاحب محل لبيع قطع الحاسوب أن اقتران ربحه ر (س) = س^{٣} – س^{٢} – ١٧ س حيث س عدد القطع المباعة، فإذا ربح المحل في يومٍ من ١٥ دينار ما عدد القطع التي باعها؟

(٦٣) اذا كان هـ (س) = س – أ عامل من عوامل الاقتران ق (س) = ٢ س^{٣} – ٣ س – ٥ فما قيمة أ ؟

(٦٤) مستطيل مساحته تمثل بالاقتران ق(س) = س^{٣} + ١١ س^{٢} + ٢٣ س - ٣٥سم^{٢} وعرضه يُمثل بالاقتران ٥ س^{٢} + س - ٦ سم اكتب الاقتران الذي يمثل طوله.

{ ارشاد: مساحة المستطيل = الطول × العرض }

(٦٥) أي من الاقترانات التالية نسبته ؟ ولماذا؟

(١) $ق_1(س) = \frac{5}{س^2 - 5}$

(٢) $ق_2(س) = \frac{س + 1}{س^2 + 1}$

(٣) $ق_3(س) = \frac{|س|}{س^2 - 9}$

(٤) $ق_4(س) = \frac{س - 1}{\sqrt{س}}$

{ الأول والثاني }

(٦٦) بسِّط الاقترانات النسبية التالية:

(١) $\frac{س^3 + 2س^2 + 1}{س + 3}$ (٢) $\frac{س^3 - 4س + 3}{س^2 - 9}$

(٣) $\frac{1 - س^2}{س^2 - 1}$ (٤) $\frac{س^2 - 1}{س^3 - 1}$

(٦٧) عددان مجموعهما يساوي ٥ وحاصل العدد الثاني في مربع العدد الأول يساوي ١٢ فما العددان؟

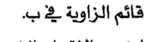
{ ٢ ، ٣ }

(٦٨) واحد من الاقترانات التالية: $هـ_1(س) = س - 3$ ، $هـ_2(س) = س - 2$

$هـ_3(س) = س + 3$ ، $هـ_4(س) = 2س - 5$

(٦٩) من الشكل المجاور اذا كان طول أ ب = طول ب جـ = س م. والمثلث أ ب جـ

قائم الزاوية في ب.



اكتب الاقتران الذي يدل على الفرق

بين مساحة الدائرة ومساحة المثلث.

{ $\frac{15}{14} س^2$ }

{ ارشاد: أ جـ يجب أن يكون قطراً؟ لماذا؟ }

(٧٠) ما قيم (س ، ص) التي تحقق المساواة (س ، س^{٢}) = (٢ س - ٢ ، ١)

{ ٢ ، ± ١ }

والمساواة:

(س^{٤} ، ´ص + ٢ ص^{٣}) = (س^{٢} ، ص + ١٦) {± ١ ، ٢ }

(٧١) اكتب العلاقة التي قاعدتها ع = { (س ، ص) = ص ، س ∋ ح}عكس شكل مجموعة من الأزواج المرتبة ثم مثّلها بيانياً على المستوى الديكارتي.

(٧٢) اكتب خمسة أزواج مرتبة (عناصر) تنتمي للعلاقة ع = {(س ،ص): ص = س^{٢} + ١ ، س ∋ ح }

(٧٣) يُنتج مصنع أبواباً من الخشب الفاخر مستطيلة الشكل ذا مقاييس متباينة بحيث يكون طول كل منها (ص) مثلي عرضه (س)، فإذا انتج المصنع أبواباً عرضها بالسنتمترات ٨٥ ، ٩٠ ، ٩٥ ، ١٠٠ ، ١٠٥ سم اكتب قاعدة العلاقة التي تربط الطول بالعرض ثم أوجد مجالها ومداها.

{ (س ، ص): ص = ٢ س ، مجالها ٨٥ ، ٩٠ ، ٩٥ ، ١٠٠ ، ١٠٥
مداها ١٧٠ ، ١٨٠ ، ١٩٠ ، ٢٠٠ ، ٢١٠ }

(٧٤) أي من العلاقة التالية اقتران؟ مع ذكر البيان:

ع$_{١}$ = { (- ١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٣) ، (٠ ، ٤) }

ع$_{٢}$ = { (- ٢ ، ١) ، (- ١ ، ٠) ، (١ ، ٣) ، (١ ، ٤) }

(٧٥) أراد شخص زراعة حوض مستطيل طوله ١٠ متر وعرضه ٦ متر بالزهور والورود واحاطته بممر منتظم العرض، اكتب الاقتران الذي يربط عرض الممر (س) متر بمساحته ق (س) متر.

{ ارشاد: مساحة الممر = مساحة الحوض والممر – مساحة الحوض
ق (س) = ٤ س^{٢} + ٣٢ س }

(٧٦) أي من الاقترانات التالية ليس واحداً لواحد مع بيان السبب؟

ق$_١$(س) = ٥ س + ١ ، ق$_٢$(س) = س^٢ ، ق$_٣$(س) = س^٣ ، ق$_٤$(س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر.

{ ارشاد : استعن باختبار الخط الأفقي} { الثاني }

(٧٧) اذا كان ق (س) = | ٤ س − س^٢| أعد تعريف الاقتران وارسم بيان منحناه على المستوى الديكارتي.

(٧٨) حل المعادلة | ٣ س − ٢ | = س { $\frac{١}{٢}$ ، ٢ }

(٧٩) هل العلاقة ع = {|س| + |ص| = ٢ ، س ، ص ∈ ص أعداد صحيحة} اقتران؟ وضّح بالأمثلة العددية.

{ لا ، س: ١ ← ص: ١ ، ١ ← −١ }

(٨٠) اذا كان ق (س) = ⟦١ − ٣ س⟧ أوجد قيمة:

ق (− ١) ، ق (٠) ، ق ($\frac{١}{٣}$) ، ق ($\frac{١}{٢}$) ، ق (١,٤)

(٨١) حل المعادلة ⟦١ − ٢ س⟧ = − ١

{ ($\frac{١}{٢}$ ، ١] }

(٨٢) أوجد مجال كل من الاقترانات التالية:

(١) ق (س) = $\sqrt{٩ - س^٢}$ { [−٣ ، ٣] }

(٢) هـ (س) = $\frac{س^٢ - ١}{س^٣ + ٢٧}$ { ح − {−٣} }

(٣) ل (س) = $\frac{٢ س - ٥}{س^٣ + ٥}$ { ح }

(٨٣) اذا كان ق (س) = { (١ ، ٥) ، (٢ ، ٤) ، (٣ ، ١) }

اكتب قاعدة الاقتران ق$^{-١}$ (س) على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.

(٨٤) بيّن كيف يكون الاقتران $ق^{-1}$ (س) = $\sqrt[٣]{س - ١}$ اقتران عكسي للاقتران ق (س) = $س^{٣}$ + ١

{ ارشاد : استعن بعملية تركيب الاقترانات }

(٨٥) اذا كان ق (س) = $س^{٢}$ – ٢ س – ٣ فأوجد حلول المعادلات:

(١) ق (س) = صفر { ٣ ، - ١ }

(٢) ق (س) = ٥ { - ٢ ، ٤ }

(٣) ق (س) = - ٤ { ١ }

(٨٦) اذا كانت أ = { ١ ، ٢ ، ٣ } وكانت ب = { مجموعة كل المجموعات الجزئية للمجموعة أ } وكانت العلاقة ع = { (س ، ص): س، ص ∋ ب ، س < ص }
فهل العلاقة ع علاقة انعكاس أم تعدي أم تماثل أم تكافؤ؟!!

{ انعكاس وتعدٍ }

(٨٧) اذا كان ق (س) = $س^{٣}$ ، هـ (س) = $\sqrt[٣]{س}$ ما قيمة (ق + هـ) (٨) ، (ق – هـ) (٨) ، (ق • هـ) (٨) ، (ق ÷ هـ) (٨)

(٨٨) إذا كان ق (س) = (أ + ٣) $س^{٣}$ + (٣ ب - ١) $س^{٢}$ + ٢

هـ (س) = (ب - ٢) $س^{٣}$ + (أ + ٣) $س^{٢}$ + ٢

وكان ق (س) = هـ (س)

ضمن هذه المساواة، أوجد قيم المتغيرين أ ، ب { $-\frac{٧}{٢}$ ، $-\frac{١}{٢}$ }

(٨٩) أجرِ عملية القسمة التالية ($س^{٥}$ - ٢) ÷ ($س^{٢}$ + ٢ س + ١)

(٩٠) إذا كان $هـ_{١}$ (س) = س + ١ عاملاً من عوامل الاقتران ق (س) = $س^{٧}$ + ١ فاكتب العامل الآخر على شكل الاقتران $هـ_{٢}$ (س)؟

{ هـ$_{٢}$ (س) = س^{٦} – س^{٥} + س^{٤} – س^{٣} + س^{٢} – س + ١ }

{ ارشاد : استعن بعملية القسمة سواء أكانت طويلة أو تركيبية }

(٩١) حلل الاقترانين ق$_{١}$ (س) = ٢ س^{٥} - ٤ س^{٣} – ٦٤

ق$_{٢}$ (س) = س^{٤} + ٤ الى عواملهما الأولية ولكن كلاً على انفراد

(٩٢) ما قيمة م التي تجعل س - ٢ عاملاً من عوامل الاقتران

ق (س) = س^{٣} – ٣ س^{٢} + م س - ١ { $\frac{٥}{٢}$ }

وما قيمة ن التي لا تجعل س + ٢ عاملاً من عوامل الاقتران

ق (س) = (ن + ٣) س^{٢} + ٥ ن س + ١ بل تجعل باقي القسمة يساوي ٦

{ $\frac{٧}{٦}$ }

(٩٣) اذا كان ق (س) = ٢ س + ١ ، ب قيمة س ليكون ق (س) = ١٣

{ ٦ }

(٩٤) اكتب مدى الاقتران الذي قاعدته ق (س) = ٣ – ٢س

ومجاله = {- ٢ ، - ١ ، ١}

{- ٣ ، - ٢ ، ٠ }

(٩٥) اذا كان ق (س) = ٣ س - ٥ فما قيمة المتغير س عندما ق (س) = ٤٩ ؟

(٩٦) أي من الشكلين التاليين علاقة؟ وأيهما

اقتران؟ وما مدى كل منهما؟

{ الأول اقتران مداه ب ، د ، ق

والثاني علاقة مداها ب ، جـ ، د ، ق ، هـ }

(٩٧) بين فيما اذا كان المخطط السهمي العددي التالي يمثل اقتراناً على المجموعة

أ = { ١ ، ٢ ، ٣، ٤ ، ٥ } أم علاقة؟

(٩٨) اذا كان الاقتران ق: ح ← ح حيث

ق (س) = { (٠ ، ٠) ، (١ ، ١) ، (٢ ، ٤) ، (- ١ ، ٢) ، ... }

اكتب قاعدته الجبرية { ق (س) = $س^٢$ }

(٩٩) إذا كانت الصورة العامة للاقترانات التربيعية ق (س) = أ $س^٢$ + ب س + جـ

أوجد قيمة $\frac{-ب}{٢أ}$ ، ق ($\frac{-ب}{٢أ}$) احداثيات رأس منحنى الاقتران التربيعي:

(١) ق (س) = ٥ $س^٢$ + ٢ س - ١

(٢) ق (س) = (س - ٤) (س + ٤)

(٣) ق (س) = ٤ $س^٢$ – ٨ س

(١٠٠) مثّل الاقتران ق (س) = $س^٢$ - ٤ س - ١ على المستوى الديكارتي ثم أوجد احداثيات رأسه ومعادله محور تماثله.

(١٠١) اذا كان منحنى الاقتران ق (س) = أ $س^٢$ + ب س + ٢ يمر بالنقطتين (١٠،٤) (١ ، ١) أوجد قيمة كل من أ ، ب {١ ، - ٢}

(١٠٢) حل المعادلة $س^٢$ - ٥ |س| - ١٤ = صفر {± ٧}

{ ارشاد: $س^٢$ = $|س|^٢$ }

(١٠٣) إذا كان ق (س) = ٢ س - ٧ ، هـ (س) = $\frac{س + ١}{س - ١}$ ، س ± ١ أوجد (هـ ٥ ق) (س) بأبسط صورة.

{$\frac{س - ٣}{س - ٤}$}

(١٠٤) حل المعادلة $\left|\frac{٣ س - ٢}{س}\right|$ = ٤ {- ٢ ، $\frac{٢}{٧}$}

(١٠٥) يحتوي خزان ٦٢٥ م^{٣} ماء، ويتناقص الماء كل يوم بمقدار ٢٥ متر مكعب عن اليوم الذي قبله حسب الجدول:

كمية الماء المتبقية في الخزان م^{٣} في نهاية اليوم:

الأول: ٦٢٥ - ٢٥ × ١ = ٦٠٠ م^{٣}

الثاني: ٦٢٥ - ٢٥ × ٢ = ٥٧٥ م^{٣}

الثالث: ٦٢٥ - ٢٥ × ٣ = ٥٥٠ م^{٣}

وهكذا يستمر على نفس النمط

والآن أجب عما يلي:

(١) اكتب قاعدة الاقتران التي تربط كمية الماء المتبقية في الخزان بعد س يوم. { ٦٢٥ - ٢٥ س }

(٢) بعد كم يوم يبقى في الخزان ٢٧٥ م^{٣} من الماء؟ { ١٤ يوم }

(٣) بعد كم يوم ينفذ الماء من الخزان فيصبح فارغاً؟ {٢٥ يوماً }

(١٠٦) تم ترتيب أعواد من الثقاب في الشكل وفق نمط معين كما يلي:

المرحلة الأولى المرحلة الثانية المرحلة الثالثة

والآن أجب عما يلي:

(١) اكتب قاعدة النمط (الاقتران) {ق (ن) = ٣ ن +٣ }

{ ارشاد: ابدأ بالجدول المرحلة العدد

١ ⟵ ٦ = ٣ × ١ + ٣

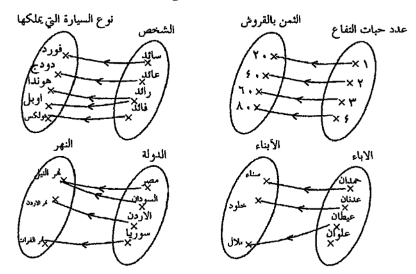
٢ ⟵ ٩ = ٣ × ٢ + ٣

٣ ⟵ ١٢ = ٣ × ٣ + ٣

وهكذا...

(٢) اذا استمر النمط وبهذا الشكل كم عدد أعواد الثقاب اللازمة لعمل المرحلة العاشرة؟ {ق (١٠) = ٣ × ١٠ + ٣ = ٣٣ عود }

(١٠٧) ميّز العلاقة من الاقتران اعتماداً على مخططاتها السهمية التالية:



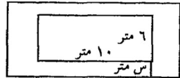
(١٠٨) لتشجيع زراعة الأشجار في الأردن تعرض وزارة الزراعة حوافز شخصية للمزراعين، إذ قدمت ٢٠ دينار مقابل كل دونم يزرع أشجار، أكمل الجدول التالي:

المساحة بالدونمات	١	٢	٣	٤	٥
المكافأة بالدنانير	٢٠	٤٠	...	...	...

ثم اكتب قاعدة النمط أو الاقتران ق (س) الذي يمثل قيمة الحوافز.

{ ق (س) = ٢٠ س }

(١٠٩) أراد شخص زراعة حوض بالزهور على شكل مستطيل طوله ١٠ أمتار وعرضه ٦ أمتار واحاطته بممر منتظم كما في الشكل.



إذا كان عرض الممر س متر، اكتب الاقتران الذي يمثل مساحته ثم أوجد مساحته عندما عرضه يساوي ١ متر {ق (س) = (١٠ + ٢ س) (٦ + ٢ س) - ٦٠ }

{ ارشاد: مساحة الممر = مساحة الحوض والممر – مساحة الحوض }

(١١٠) أوجد قاعدة كل من العلاقات التي تربط بين المتغيرين س ، ص وبيّن فيما اذا أصبحت هذه العلاقة اقتران أم ما زالت علاقة؟

س	٢	٥	٠	٦	٤
ص	٤	٢٥	٠	٣٦	١٦

{ ص = $س^٢$ }

س	٢ -	١-	١	٢
ص	٢	١	١	٢

{ ص = |س| }

س	٣	٥	٦	١٠
ص	٨	٢٤	٣٥	٩٩

{ ص = $س^٢$ - ١ }

س	٥	٧	٩	١١
ص	٩	١٣	١٧	٢١

{ ص = ٢ س - ١ }

{ وجميعها اقترانات }

(١١١) أيٌ من الاقترانات التالية غير خطي:

ق (س) = س + ٢ ، هـ (س) = $\sqrt{٣}$ س - ١

ل (س) = $\frac{١}{س}$ + ٥ ، ك (س) = $\frac{٣}{٤}$ - ٢ س {ل (س) }

(١١٢) في احدى القاعات المخصصة لاقامة الأفراح، اذا كانت تكلفة الشخص المدعو ٣ دنانير وكان مدير القاعة يتقاضى مبلغ ٢٥٠ ديناراً بدل خدمات (مصروفات ثابتة)، ما تكاليف القاعة إذا كان عدد المدعوين ١٠٠ شخص، ٢٠٠ شخص؟

{ ق (س) = ٣ س + ٢٥٠ حتى س عدد المدعوين }

(١١٣) اذا كان ق (س) = ٢ - ٣ س.

أوجد ق (- ١) ، ق ($\sqrt{٣}$) ، ق (٠) ، ق ($\frac{١}{٣}$)

(١١٤) تنتج شركة مصانع الاسمنت الاردنية س طن يومياً، فإذا كانت تكلفة الطن الواحد ٧٥ دينار، وتدفع الشركة مصاريف أخرى ثابتة مقدارها ٥٠٠ دينار في اليوم، اكتب الاقتران الذي يربط تكاليف الانتاج بعدد الأطنان في اليوم الواحد.

{ ق (س) = ٧٥ س + ٥٠٠ }

(١١٥) أوجد ميل كل من الاقترانات (الاقتران الخطي يمثل بمستقيم بالهندسة التحليلية} :

ق (س) = ٦ س + ٩

ل (س) = ٧ − ٤ س

هـ (س) = ٨ + ٥ س

{ارشاد: اجعل الاقتران على صورة ص = م س + جـ حيث م الميل م = أ معامل س}.

(١١٦) كم درجة كل من الاقترانات التالية إن كانت من كثيرات الحدود؟

ق (س) = $\sqrt[٢]{س}$ ، ق (س) = س (س^{٢} − ١) ، ق (س) = $\frac{لوي}{هـ}$

ق (س) = $\frac{٤}{س^{٢}}$ ، ق (س) = س^{٤} − ٣ س ، ق (س) = س^{٢} + ٤ س$^{\frac{١}{٢}}$ − ٥

ق (س) = $\frac{١}{٣}$ س^{٢} + ٥ س ، ق (س) = $\sqrt{٥ س^{٥}}$ + ٥

(١١٧) وجد صاحب مصنع للثلاجات أن التكلفة الكلية للانتاج الاسبوعي لثلاجات عددها (س) تقدر بالاقتران ك (س) = س^{٣} − ٢س^{٢} − ٧ س + ٦٠٠ فإذا بيعت الثلاجة الواحدة بمبلغ ٥٠٠ دينار، جد اقتران الربح لبيع الثلاجات.

(١١٨) مثّل منحنى كل من الاقترانات التلاية بيانياً على المستوى الديكارتي وكلاً لوحده:

ق (س) = − ٥ ، ق (س) = ٣ س − ٤ ، ق (س) = س^{٢} − ٤ س + ٢

(١١٩) اذا كان ق$_١$ (س) = ٢ س^٣ ، ق$_٢$ (س) = س^٢ - ٤ س + ١

أوجد (ق$_١$ + ق$_٢$) (س) ، (ق$_١$ − ق$_٢$) (س) ، (ق$_١$ • ق$_٢$) (س)

(ق$_١$ + ق$_٢$) (− ٢) ، (ق$_١$ − ق$_٢$) (− ٢) ، (ق$_١$ • ق$_٢$) (− ٢)

(١٢٠) أوجد خارج قسمة ق (س) = س^٣ + ٣ س^٢ − س - ٣ على هـ (س) = ١ + س

{ س^٢ - ٢ س + ١ }

(١٢١) ما باقي قسمة ق (س) = ٢ س^٢ + ٣ س - ٢ على هـ (س) = ٢ س + ١ ؟

{ ارشاد: باستخدام عملية القسمة الطويلة أو التركيبية أو نظرية الباقي }

(١٢٢) هل الاقتران هـ (س) = س + ٣ من عوامل ق (س) = س^٣ + ٢ س^٢ − س + ٦ الأولية؟ وإن كان كذلك أوجد العوامل الأولية الأخرى.

(١٢٣) إذا كان هـ (س) = س - ٥ عاملاً من عوامل الاقتران ق (س) = س^٣ + ٢ س^٢ − أ س - ٢ الأولية. أوجد قيمة أ .

(١٢٤) هل الاقتران:

(١) هـ (س) = س - ٣ عامل من عوامل ق (س) = س^٣ + ٢٧ الأولية؟

(٢) ل (س) = س + ٢ عامل من عوامل ق (س) = س^٤ + ٢ س^٢ + س + ٢ الأولية؟

(٣) و (س) = س - ١ عامل من عوامل ق (س) = س^٤ - ١ الأولية؟

(١٢٥) حلل الاقترانات التالية الى عواملها الأولية:

ق$_١$ (س) = س^٢ - ١ ، ق$_٢$ (س) = س^٣ - ١

ق$_٣$ (س) = س^٤ - ١ ، ق$_٤$ (س) = س^٥ - ١

ق$_٥$ (س) = س^٣ − ٢ س^٢ - ٩ ، ق$_٦$ (س) = س^٢ + ١٠ س - ١١٠٠٠

(١٢٦) بسّط الاقترانات النسبية التالية الى أبسط صورة ممكنة:

$$\text{ق}_{١}(\text{س}) = \frac{\text{س} - ٢}{\text{س}^{٣} - ٣\text{س}^{٢} + ٤\text{س} - ٤}$$

$$\text{ق}_{٢}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٥\text{س} - ١٢}{\text{س} - ٤}$$

$$\text{ق}_{٣}(\text{س}) = \frac{\text{س}^{٣} + \text{س}^{٢} - ٥|\text{س}|}{٢\text{س} + ٦}$$

(١٢٧) حل المتباينة $\text{س}^{٢} - ٧\text{س} < -٦$

(١٢٨) اذا كان $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٢} - ٤$ ، $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٣\text{س}^{٢} - ٧$

أوجد $(\text{ق} - \text{هـ})(-٢)$

(١٢٩) اذا كان باقي قسمة $\text{ق}(\text{س}) = \text{س}^{٣} + ٢\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + ١$

على $\text{هـ}(\text{س}) = \text{س} + \text{أ}$ يساوي ٦ فما قيمة أ ؟

(١٣٠) إذا كان $\text{ق}(\text{س}) = ٣\text{س}^{٣} - ٢\text{س}^{٢} + \text{س} - ١$

أوجد ق (٠) ، ق (١) ، ق (− ٢) ، ق (هـ + د) ، $\text{ق}(\text{س}^{٢})$

(١٣١) حلل الاقتران $\text{ق}(\text{س}) = ١ - \text{س}^{\text{ن}}$ حيث $\text{ن} \in \text{ط}^{*}$ الى عوامله الأولية عندما ن = ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ فقط.

{ ارشاد: استعن بالقسمة الطويلة إذا أمكنك }

(١٣٢) حل المعادلة $|\text{س}| = |١ - \text{س}|$ $\quad \left\{ \frac{١}{٢} \right\}$

والمعادلة:

$|\text{س} + ١|^{٢} + ٣|\text{س} + ١| - ٤ = \text{صفر}$ $\quad \{-٢ ، ٠\}$

(١٣٣) اذا كان
$$\text{ق}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س} ، & \text{س} < \text{صفر} \\ \text{س}^{٢} ، & \text{صفر} \le \text{س} < ٥ \\ \text{س}^{٣} ، & \text{س} \ge ٥ \end{cases}$$

أوجد ق (− ٥) ، ق (صفر) ، ق (٥)

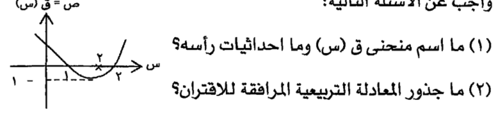
(١٣٤) إذا كان:

(١) ق (س) = ١ - $\frac{١}{س}$ أوجد ق^{١} (١) { $\frac{١}{١ - س}$ }

(٢) ق (س) = $\frac{٣ س + ٢}{١ - س}$ أوجد ق^{١} (س) { $\frac{س + ٢}{س + ٣}$ }

(١٣٥) اعتمد على الشكل المجاور الذي يمثل منحنى ق (س) = أ س^{٢} + ب س + جـ

وأجب عن الأسئلة التالية:



(١) ما اسم منحنى ق (س) وما احداثيات رأسه؟

(٢) ما جذور المعادلة التربيعية المرافقة للاقتران؟

(٣) اكتب قاعدة ق (س)

(١٣٦) اذا كان ق (س) = ٢ س^{٢} - ٥ س - ٣ أوجد قيمة ق (٢ أ - ٣) بدلالة أ.

(١٣٧) اذا كان ق (س) — س^{٢} - ٥ ، هـ (س) = س٣ - ٩ أجب عما يلي:

(١) هل ق (٢) = هـ (٢) { نعم }

(٢) هل ق (س) = هـ (س) { لا }

ماذا يعني ذلك؟

(١٣٨) اذا كان ق$_{١}$ (س) = س^{٣} - ١ ، ق$_{٢}$ (س) = س^{٢} - ١

ما درجة كل من الاقترانات:

(ق$_{١}$ + ق$_{٢}$) (س) ، (ق$_{١}$ — ق$_{٢}$) (س) ، (ق$_{١}$ · ق$_{٢}$) (س)

(١٣٩) اعتماداً على الشكل المجاور أوجد مساحة



الجزء المظلل بدلالة س،

عندما س = ٧ سم أوجد مساحته بالسم^{٢}.

(١٤٠) يُقال في بعض الأحيان أن عدد عوامل كثير الحدود الأولية تساوي درجته، هل ق (س) = $س^٢$ - ٧ س + ٦ يحقق هذه المقولة أم لا؟ { نعم }
بيّن ذلك.

وهل هـ (س) = $س^٣$ + ٤ $س^٢$ + ٦ س + ٩ يحقق هذه المقولة أم لا {لا }
بيّن ذلك.

(١٤١) اذا كان باقي قسمة ق (س) = $س^٢$ + ٤ س + ٢ على (س – أ) يساوي مثلّي باقي قسمة ق (س) على (س + أ) ما قيمة أ ؟ { ٢ ، ١٠ }

(١٤٢) حل المعادلة $س^٣$ (س + ١) = ٤ س (س + ١) { - ٢ ، - ١ ، ٠ ، ٢ }
والمعادلة $س^٤$ = ٩

(١٤٣) جزئ الصيغة النسبية (الكسر) $\frac{١١ س - ٧}{س^٣ + ٢ س^٢ - ٥ س - ٦}$
{ ثلاثة كسور }

والكسر $\frac{س^٢ - س + ٣}{س^٢ + س - ٢}$ { نحتاج قسمة طويلة }

(١٤٤) اذا كان (س - ١) عاملاً من عوامل ق (س) = $س^٣$ - ٧ س + ٦ الأولية فأيّ من الاقترانات الآتية هي عوامل أولية أخرى للاقتران؟

س - ٣ ، س + ١ ، س - ٦ ، س - ٢

(١٤٥) ما عدد أصفار الاقتران ق (س) = ٣ $س^٣$ + ٢ $س^٢$ - ٧ س - ٦

هل عددها ٣ أم ١٦ أم ٨ أم ٦ ؟

(١٤٦) اذا كان ق (س) = $\begin{cases} ١ - س^٢ \text{ ، } س \leq \text{صفر} \\ س \text{ ، صفر} < س < ١ \\ س \text{ ، } س \geq ١ \end{cases}$

هـ (س) = $\begin{cases} - ٢ س \text{ ، } س \leq \text{صفر} \\ - ٢ س \text{ ، صفر} < س < ١ \\ ١ - س \text{ ، } س \geq ١ \end{cases}$

اكتب قاعدة كل من الاقترانات:

(١) (ق + هـ) (س) (٢) (ق − هـ) (س)

(٣) (ق · هـ) (س).

(١٤٧) أوجد مجال كل من الاقترانات:

(١) ق (س) = $\sqrt{١ - س^٢}$ (− ١ ، ١)

(٢) ق (س) = $\frac{١}{\sqrt{١ - س^٢}}$ (−$\sqrt{٢}$ ، $\sqrt{٢}$)

(١٤٨) أوجد مجموعة الحل للمعادلة س^٣ − ٩ س^٢ + ٢٤ س − ١٨ = صفر

(١٤٩) أوجد العامل المشترك الأعظم (ع. م. أ) للمقدارين الجبريين:

س^٣ − ٢ س − ٤ ، س^٣ − س^٢ − ٤

{ ارشاد : استخدم نظرية العوامل والتحليل الى العوامل أيضاً } .

(١٥٠) اكتب قاعدة الاقتران ق (س) الذي يقسم كلاً من الاقترانين:

هـ (س) = ٤ س^٢ + ٣ س − ١٠

ل (س) = ٤ س^٣ + ٧ س^٢ − ٣ س − ١٥ دون باقٍ.

{ ارشاد: ق (س) = المضاعف المشترك الأصغر للاقترانين }

(١٥١) اذا كان ق (س) = ك س^٣ ويمر منحناه بالنقطتين أ (٢ ، ١٦)،

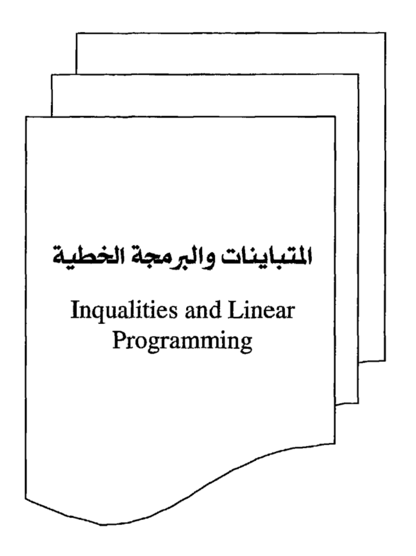
ب ($\frac{١}{٢}$ ، ص$_١$) أوجد قيمة ص.

{ ارشاد: أوجد قيمة ك أولاً }

(١٥٢) اذا كان ق (س) = $\frac{١}{س}$ ، س ≠ صفر

هـ (س) = ٥ س^٤ + ٨

أوجد (ق ∘ هـ) (− ١) ، (هـ ∘ ق) (− ١) { $\frac{١}{١٣}$ ، ٢٣ }



المتباينات والبرمجة الخطية

Inqualities and Linear Programming

(٩ - ١) المتباينة Inquality

المتباينة جملة مفتوحة تحتوي رمزاً أو أكثر من رموز علاقة الترتيب التالية:

$<$ وتُقرأ أكبر من

$\leq$ وتُقرأ أكبر من أو يساوي

$>$ وتُقرأ أصغر من

$\geq$ وتُقرأ أصغر من أو يساوي

مثل: س $>$ ٣ (حيث س عدد حقيقي)

وكذلك: س + ص $\leq$ ٥ (حيث س ، ص عددان حقيقيان)

وحل المتباينات معناه ايجاد قيم المتغير أو المتغيرات لتصبح هذه الجمل صواباً في حقل الأعداد الحقيقية حيث مجموعة التعويض دائماً هي ح "مجموعة الأعداد الحقيقية".

والمتباينات تخضع في حلولها لقانون التثليث (مرَّ سابقاً) والذي مفاده لأي عددين حقيقيين س ، ص فإما أن يكون:

س $<$ ص أو س = ص أو س $>$ ص

والجدير بالذكر أن لكل متباينة معادلة مرافقة كما يلي:

للمتباينة س $>$ ٣ معادلة مرافقة هي س = ٣

للمتباينة س + ص $\geq$ ٥ معادلة مرافقة هي س + ص = ٥ وهكذا

وقبل البدء بإيجاد مجموعات الحل للمتباينات، نُعيد مناقشة وتوضيح خواص المتباينات كما مرت في حقل الأعداد الحقيقية بإيجاز شديد، فنقول يوتر على أي علاقة ترتيبية (متباينة) بين العددين الحقيقيين س ، ص ما يلي من العمليات الرياضية:

(i) اذا كان س ≥ ص فإن س + أ ≥ ص + أ ، لكل أ ∋ ح

مثال: إذا كان ٧ ≥ ١٠ فإن ٧ + ٥ ≥ ١٠ + ٥ لأن ١٢ < ١٥ (جمع)

(ii) اذا كان س ≥ ص فإن س − أ ≥ ص − أ ، لكل أ ∋ ح

مثال: إذا ٧ ≥ ١٠ فإن ٧ − ٣ ≥ ١٠ − ٣ لأن ٤ ≥ ٧ (طرح)

(iii) اذا كان س ≥ ص فإن س ٠ جـ. ص . جـ لكل جـ ∋ $ح^+$

مثال: اذا كان ٧ ≥ ١٠ فإن (٧) (٢) ≥ (١٠) (٢) لأن ١٤ ≥ ٢٠ (ضرب جـ > صفر)

(iv) إذا كان س ≥ ص فإن س ٠ جـ ≤ ص ٠ جـ لكل جـ ∋ $ح^-$

مثال: اذا كان ٧ ≥ ١٠ فإن (٧) (− ٢) ≤ (١٠) (− ٢) لأن − ١٤ ≤ − ٢٠ (ضرب جـ > صفر)

نلاحظ عكس اشارة الترتيب أو التباين

من ≥ الى ≤

(v) اذا كان س ≥ ص وكلاهما س ، ص ∋ $ح^+$ (موجبان معاً)

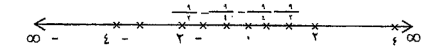
أو س ≥ ص وكلاهما س ، ص ∋ $ح^-$ (سالبان معاً)

فإن $\frac{١}{س} \leq \frac{١}{ص}$ (مقلوب العددين الحقيقيين الموجبين معاً أو السالبين معاً)

مثال: اذا كان ٢ ≥ ٤ ⟵فإن $\frac{١}{٢} \leq \frac{١}{٤}$

وإذا كان − ٤ ≥ − ٢ ⟵فإن − $\frac{١}{٤}$ ≤ − $\frac{١}{٢}$

وهذا صواب وواضح في حقل الأعداد الحقيقية كما هو في الشكل التالي:



(vi) اذا كان س ≥ ص وكان ص ≥ ع فإن س ≥ ع

لكل س ، ص ، ع ∋ ح (علاقة التعدي بالأعداد الحقيقية)

مثال: اذا كان ٥ < ٧ ، ٧ < ٩ ←فإن— ٥ < ٩ (لا تحتاج الى تفسير)

(vii) اذا كان س ص < صفر (يكون للعددين الحقيقيين س ، ص نفس الاشارة) والعكس صواب، إذا كان للعددين الحقيقيين س ، ص نفس الاشارة يكون س ص < صفر.

مثال: إذا كان (٥) (٧) > صفر فإن العددين يكونان إما (+٥ ، +٧) أو (- ٥ ، - ٧)

حيث (+٥) (+ ٧) = ٣٥ > صفر

وكذلك (- ٥) (- ٧) = ٣٥ > صفر

وإذا كان س ص < صفر يكون للعددين الحقيين س ، ص اشارتان مختلفتان ، والعكس صواب، إذا كان للعددين س ، ص اشارتان مختلفتان يكون س ص < صفر.

مثال: (- ٥) (+٧) = (+ ٥) (- ٧) = - ٣٥ > صفر

"وهناك خصائص أخرى للمتباينان نناقشها في مواضعها الصواب"

وبما أن حل المتباينات معناه ايجاد القيم العددية للمتغيرات التي تحققها، وغالباً ما تكون هذه الحلول على شكل فترات عددية بأنواعها:

"مفتوحة، مغلقة، نصف مفتوحة، نصف مغلقة"

وبما أن طرق حل المتباينات مماثلة لطرق حل المعادلات في حقل الأعداد الحقيقية مع فارق وحيد هو "عند ضرب أطراف المتباينة بعدد حقيقي سالب نعكس رمز التباين، وهذا مفقود بالنسبة للمعادلات كونها (المعادلات) لا تحوي رموزاً للتباين على الاطلاق.

ولنبدأ:

(٩- ٢) حل نظام من المتباينات بمتغير واحد ومن درجات عدة:

أولاً: حل المتباينات من الدرجة الأولى:

مثال:

حل المتباينة س + ٤ > ١٢

- ٤ - ٤

س > ٨

مجموعة الحل= {س: س > ٨ }

وكفترة س = (- ∞ ، ٨)

وعلى خط الأعداد

- ∞ ٨

مع ملاحظة أن الدائرة الصغيرة حول العدد ٨ وغير المظللة تعني أن العدد ٨ لا ينتمي الى الحل.

هذا ويمكن أن ترتبط المتباينات مع بعضها البعض بأدوات الربط {أو ، و} لتكون متباينة مركبة كما في المثالين:

مثال (١):

فإذا كان الرابط هو (أو) فإن مجموعة الحل كفترة عددية للمتباينة المركبة هي ف = $ف_1 \cup ف_2$ ، حيث:

أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:-

٤ س + ٣ > ٧ (أو) ٤ س + ٥ > - ٣

الحل:

٤ س + ٣ > ٧   ٤ س + ٥ < - ٣

- ٣ - ٣   - ٥ - ٥

٤ س > ٤   ٤ س < - ٨

س > ١   س < - ٢

مجموعة الحل: {س: س > ١ أو س < - ٢ }

وعلى خط الأعداد

وكفترات: س = (- ∞ ، - ٢) ∪ (١ ، ∞) = ح — [- ٢ ، ١]

مثال (٢):

وإذا كان الرابط هو (و) فإن مجموعة الحل كفترة عددية للمتباينة المركبة هي: ف = ف١ ∩ ف٢

حيث ف فترة الحل للمتباينة المركبة

ف١ ، ف٢ فترات الحل لكل متباينة من المتباين هكذا:

أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:-

٤ س + ٣ < ٧ (و) ٤ س + ٣ > - ٧

يمكن كتابة المتباينة المركبة وكأنها واحدة هكذا (إذا كان الرابط و) والطرف الأيمن نفسه كما في المثال:

- ٧ < ٤ س + ٣ < ٧

- ٣   - ٣   - ٣

$\frac{-١٠}{٤} < \frac{٤س}{٤} < \frac{٤}{٤}$

$\frac{-٥}{٢} <$ س < ١

مجموعة الحل: {س : $-\frac{5}{2}$ < س < ١}

على خط الاعداد

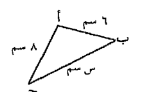
∞ -   ٢-   ١   ∞

وكفترة: ($-\frac{5}{2}$ ، ١)

مثال تطبيقي:

اذا كان طولا ضلعين في مثلث هما ٦ سم، ٨ سم ما طول الضلع الثالث؟

نفرض أن طول الضلع الثالث = س سم



(وحيث أن مجموع طولي ضلعين في مثلث أكبر من طول الضلع الثالث)) (نظرية)

فإن:

٦ + ٨ > س   و   ٦ + س > ٨   و   ٨ + س > ٦

ولكننا نأخذ المتباينين الأول والثاني لنشكل متباينة مركبة:

هكذا: ٦ + ٨ > س (و) ٦ + س > ٨ {أما ٨ + س > ٦ فليست مقبولة هنا كون ٨ > ٦ بالأصل ونتج أعداد سالبة بعد حلها والأطوال ليست سالبة اطلاقاً}

١٤ > س (و) ٦ + س > ٨

- ٦   - ٦

س > ٢

لذلك يمكن أن يقال بأن:

٢ < س < ١٤

مجموعة الحل: { س: ٢ < س < ١٤ }

وعلى خط الاعداد

وكفترة

والتفسير أنه يمكن رسم مثلث شرط أن ينحصر الضلع الثالث فيه بين الطولين ٢ سم ، ١٤ سم فقط وليس أيهما.

مثال:

حل المتباينة - ٣ (٤ – س) = ١٨ فك الأقواس

- ١٢ + ٣ س ≥ ١٨

+ ١٢ + ١٢

$\frac{٣س}{٣} \geq \frac{٣٠}{٣}$

س ≥ ١٠

الحل كمجموعة: {س : س ≥ ١٠ }

وعلى خط الاعداد

وكفترة (- ∞ ، ١٠]

مثال:

حل المتباينة $\frac{٣ - ٢س}{١٢} - \frac{٣س - ٦}{٤} \leq \frac{٧}{١٢} - \frac{٥ (س - ٢)}{٦}$

يجب التخلص من الكسور وذلك بضرب طرفي المتباينة بالعدد ١٢ هكذا:

$١٢ \left(\frac{٣ - ٢س}{١٢} - \frac{٣س - ٦}{٤} \leq \frac{٧}{١٢} - \frac{٥ (س - ٢)}{٦} \right)$

∴ ٣ – ٢ س - ٣ (٣ س - ٦) ≤ ٧ – ١٠ (س - ٢)

٣ - ٢ س - ٩ س + ١٨ ≤ ٧ – ١٠ س + ٢٠

وبنقل المتغيرات على الطرف الأيمن والاعداد على الطرف الأيسر هكذا:

- ٢ س - ٩ س + ١٠ س ≤ ٧ + ٢٠ - ٣ - ١٨

- ١ (- ١ س ≤ ٦) مع تغيير اشارة التباين

س ≥ - ٦ مجموعة الحل = {س: س ≥ - ٦ }

على خط الاعداد

∞ - ٦ - ∞

وكفترة (- ∞ ، - ٦]

ثانياً: حل المتباينات من الدرجة الثانية:

والحل يتم في هذا البند بالاشارات الموجبة والسالبة هكذا:

مثال:

حل المتباينة س^{٢} - ٤ س + ٣ < صفر

نجد اشارة الطرف الأيمن بعد تحليله الى عوامله الأولية (اقترانات أولية) هكذا:

(س - ٣) (س - ١) < صفر

نجد اشارة س - ٣

س - ٣ = صفر ⟵ س = ٣ صفره

ق (٠) = ٠ - ٣ = - ٣ سالب

اشارة س - ١

س - ١ = صفر ⟵ س = ١ صفره

ق (٠) = ٠ - ١ = - ١ سالب

ضرب الاشارات



ويمكن التوصل الى هذه النتيجة كما يلي:

بين الجذرين الاشارة عكس اشارة س^{٢}

++++   ----   ++++

عكس اشارة س   ١   نفس اشارة س^{٢} ٣   عكس اشارة س^{٢}

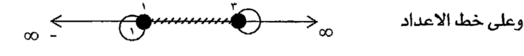
وبما أن المطلوب أن قيمة المتباينة < صفر أي سالبة

فإن الحل للمتباينة س^{٢} - ٤ س + ٣ صفر (قيم سالبة)

الحل كمجموعة {س: ١ < س < ٣ }

وكفترة (١ ، ٣)

وعلى خط الاعداد



مثال:

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

٢ س^{٢} – ٢ س < ٤ بضرب جميع أطراف المتباينة بالعدد $\frac{١}{٢}$

$\frac{١}{٢}$ (٢ س^{٢} - ٢ س < ٤) ⟵ س^{٢} – س < ٢

∴ س^{٢} – س – ٢ < صفر تحليل الطرف الأيمن الى عوامله الأولية كاقتران تربيعي

(س - ٢) (س + ١) < صفر

والحل يتم بالاشارات أيضاً هكذا"

اشارة س- ٢

وصفره = ٢

اشارة س + ١

وصفره = - ١

اشارة س^{٢} – س - ٢

ضرب الاشارات

- -   - -   +++ (∞ - ، ٢ ، ∞)

- -   + +   + + (∞ - ، ١ - ، ∞)

+++   - -   +++ (∞ - ، ١ - ، ٢ ، ∞)

مجموعة الحل للمتباينة س^{٢} – س – ٢ > صفر (القيم موجبة)

الحل كمجموعات {س: س < – ١ ، س > ٢ }

كفترات (– ∞ ، – ١) ∪ (٢ ، ∞) = ح – [– ١ ، ٢]

وعلى خط الاعداد

مثال:

حل المتباينة س^{٢} + ٤ س – ٢ ≤ صفر

وحيث أن الطرف الأيمن لا يحلل إلا بواسطة اكمال المربع أو القانون هكذا: لأن مميزه ف^{٢} – ٤ ـ جـ = (٤)^{٢} – ٤ × ١ × – ٢ = ١٦ + ٨ = ٢٤ ≠ ٠١٢ فليس مربع

س^{٢} + ٤ س ≤ ٢

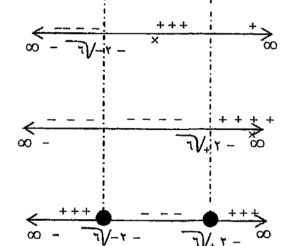
وبإضافة مربع نصف معامل المتغير س الى الطرفين كما يلي:

س^{٢} + ٤ س + (٢)^{٢} ≤ ٢ + (٢)^{٢}

أي أن (س + ٢)^{٢} ≤ ٦

أي أن (س + ٢)^{٢} – ٦ ≤ صفر ⟵ (س + ٢)^{٢} – ($\sqrt{٦}$)^{٢} ≤ صفر

والتحليل (س + ٢ – $\sqrt{٦}$) (س + ٢ + $\sqrt{٦}$) ≤ صفر



والحل يتم بالاشارات:

اشارة س + ٢ + $\sqrt{٦}$

حيث صفر الاقتران – ٢ – $\sqrt{٦}$

اشارة س + ٢ – $\sqrt{٦}$

وصفره – ٢ + ٦

اشارة المتباينة

بضرب الاشارات

حل المتباينة س^{٢} + ٤ س – ٢ ≤ صفر (قيم موجبة)

الحل كمجموعة: {س: (- ٢ -$\sqrt{6}$) س (- ٢ +$\sqrt{6}$) }

وكفترة: [(- ٢ -$\sqrt{6}$) ، (- ٢ +$\sqrt{6}$)]

وعلى خط الاعداد

ثالثاً من الدرجة الثالثة:

مثال:

حل المتباينة س^{3} - ٤ س ≥ صفر نحلل الطرف الأيمن الى عوامله

س (س^{2} - ٤) = س (س - ٢) (س + ٢) ≥ صفر

فأصفار الاقتران أو اعداده الحرجة هي س = صفر ، - ٢ ، ٢

والحل يتم بالاشارات.

اشارة س

عدده الحرج (٠)

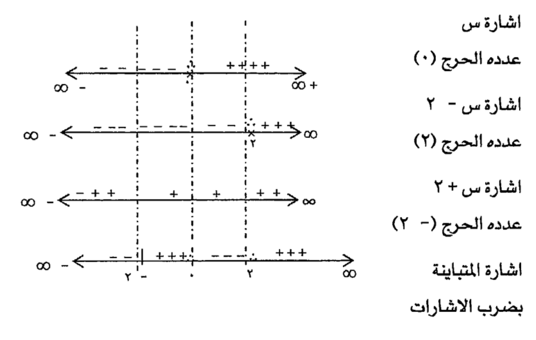
اشارة س - ٢

عدده الحرج (٢)

اشارة س + ٢

عدده الحرج (- ٢)

اشارة المتباينة



بضرب الاشارات

مجموعة الحل للمتباينة س^{3} - ٤ س ≥ صفر قيم سالبة

الحل كمجموعات سَ {س: - ∞ ≥ س ≥ - ٢ ، ٠ ≥ س ≥ ٢ }

كفترات (- ∞ ، - ٢[∪]٠ ، ٢[

وعلى خط الاعداد

رابعاً: حل المتباينات الكسرية (والتي تحتوي اقترانات نسبية) مكونة من بسط ومقام وبمتغير واحد فقط:

سنركز الآن على خواص علاقة الترتيب والتي تحتوي الرموز $<$ ، $\geq$ ، $>$ ، $\leq$ والتي بدورها تحول اشارة المتباينة الكسرية كنماذج قسمة البسط على المقام الى اشارة متباينة غير كسرية كحاصل ضرب البسط × المقام هكذا.

(وبإيجاز شديد نحوّل اشارة القسمة الى اشارات الضرب) هكذا:

فلتحويل اشارات القسمة الى اشارات ضرب نقول:

(i) اذا كان $\frac{س}{ص}$ > صفر لكل س ، ص أعداد حقيقية (اشارتا س ، ص متشابهتان في نفس الوقت)

فإن س · ص > صفر أيضاً

مثال:

من المعلوم أن $\frac{٥}{٦}$ > صفر لذلك فإن (٥) (٦) > صفر أيضاً

وكذلك $\frac{-٥}{-٦}$ > صفر لذلك فإن (-٥) (-٦) > صفر أيضاً.

(ii) أما اذا كان $\frac{س}{ص}$ < صفر لكل س ، ص أعداد حقيقية (اشارتا س ، ص مختلفتان في نفس الوقت)

مثال:

$\frac{-٥}{-٦}$ < صفر ⟵ لذا فإن (-٥) (٦) < صفر أيضاً

وكذلك $\frac{-٥}{-٦}$ < صفر لذا فإن (٥) (-٦) < صفر أيضاً.

هذه الخاصية سنعتمد عليها في حل المتباينات الكسرية بعد جعل الطرف الأيسر لها (صفر) وتبسيطها أيضاً.

هكذا :

مثال:

حل المتباينة $\frac{\text{س} + ٢}{١ - \text{س}} > ١$ ، $\text{س} \neq ١$

الحل: لذا يجب استبعاد العدد ١

$\frac{\text{س} + ٢}{١ - \text{س}} - ١ > \text{صفر} \leftarrow \frac{\text{س} + ٢ - ١\,(١ - \text{س})}{١ - \text{س}} > \text{صفر}$

$\leftarrow \frac{\text{س} + ٢ - ١ + \text{س}}{١ - \text{س}} > \text{صفر}$

أي أن $\frac{٢\text{س} + ١}{١ - \text{س}} > \text{صفر}$ ، $\text{س} \neq ١$

وبعد تحويل الاشارات الى الضرب فإن:

$(٢\,\text{س} + ١)\,(١ - \text{س}) > \text{صفر}$ أيضاً

والآن قيم الاشارات هكذا :

اشارة ٢ س + ١

$٢\,\text{س} + ١ = \text{صفر}$

$\text{س} = - \frac{١}{٢}$ الصفر

اشارة ١ – س

$١ - \text{س} = \text{صفر} \leftarrow \text{س} = ١$ الصفر

$\text{ق}\,(٠) = ١ - \text{صفر} = ١$ موجب

نضرب الاشارات

ويما أن المتباينة > كما في السؤال

فإن مجموعة الحل للمتباينة: {س: $-\frac{1}{2}$ < س < ١ }

وعلى خط الاعداد

وكفترة: ($-\frac{1}{2}$ ، ١) فالعدد ١ مستبعد أصلاً

ملحوظة:

هناك طريقة أخرى بدل تحويل اشارات القسمة الى ضرب هو ممكناً بقسمة الاشارات كما في المثال التالي:

مثال:

حل المتباينة $\frac{س^2 + س - ١٢}{س - ١}$ ≤ صفر ، س ≠ ١

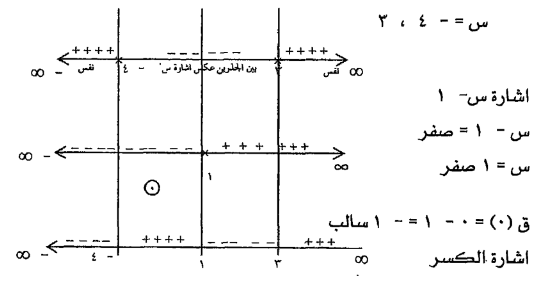
لذا يجب استبعاد العدد ١ من المجموعة الحل.

نحل السؤال مباشرة بقسمة الاشارات دون تحويل القسمة الى ضرب هكذا:

اشارة $س^2$ + س - ١٢ = صفر

(س + ٤) (س - ٣) صفر

س = - ٤ ، ٣



وبما أن اشارة المتباين موجبة كونها ≤ صفر

وبما أن س $\neq$ ١ فسوف تستبعد العدد ١

فإن مجموعة الحل: {س: - ٤ $\leq$ س $<$ ١ ، ٣ $\leq$ س $<$ ∞}

وعلى خط الاعداد

وكفترة [- ٤ ، ١) ∪ [٣ ، ∞) بعد استبعاد العدد ١

خامساً: حل متباينات تحتوي اقترانات القيمة المطلقة:

تذكّر عزيزي الدارس هذه الخاصية (ومن شقين) المفيدة عند حل المتباينات التي تحتوي اقترانات القيم المطلقة وهي:

الشق الأول:

إذا كان |س| $<$ أ ، حيث أ $\in$ ح$^+$

فإن – أ $<$ س $<$ أ

مثال:

إذا كان |س| $<$ ٥

فإن - ٥ $<$ س $<$ ٥

الشق الثاني:

وإذا |س| $>$ أ ، أ $\in$ ح$^+$

فإن أ $<$ س (أو) س $<$ - أ

مثال:

إذا كان |س| $>$ ٥

فإن ٥ $<$ س (أو) س $<$ - ٥

مثال:

حل المتباينة |س + ٢| < ٣

بعد فك القيمة المطلقة واعتماداً على الخاصية بشقها الأول:

- ٣ < س + ١ < ٣

- ٢ - ٢ - ٢

- ٥ < س < ١

مجموعة الحل: { س: - ٥ < س < ١ }

وعلى خط الاعداد

- ∞ ، - ٥ ، ١ ، ∞

وكفترة (- ٥ ، ١)

مثال:

حل المتباينة |٢ س + ٣| > ٥

وبعد فك القيمة المطلقة واعتماداً على الملاحظة بشقها الثاني فإن:

٢ س + ٣ > ٥ أو ٢ س + ٣ < - ٥

- ٣ - ٣ - ٣ - ٣

٢ س > ٢ ٢ س < - ٨

س > ١ س < - ٤

مجموعة الحل: { س: س > ١ ، س < - ٤ }

وعلى خط الاعداد

- ∞ ، - ٤ ، ١ ، ∞

وكفترات (- ∞ ، - ٤) ∪ (١ ، ∞) = ح − [- ٤ ، ١]

مثال:

حل المتباينة $\left|٧ - \frac{١}{٢}\text{س}\right| \leq ٤$

$$\therefore \quad -٤ \leq ٧ - \frac{١}{٢}\text{س} \leq ٤$$

$$-٧ \qquad -٧ \qquad -٧$$

$$-٢\left(-١١ \leq -\frac{١}{٢}\text{س} \leq -٣\right)$$

$٢٢ \geq \text{س} \geq ٦$ بعد عكس اشارات التباين

أي أن $٦ \leq \text{س} \leq ٢٢$

مجموعة الحل: $\{\text{س}:\ ٦ \leq \text{س} \leq ٢٢\}$

على خط الاعداد

$-\infty \quad ٦ \quad ٢٢ \quad \infty$

وكفترة $[٦ ، ٢٢]$

مثال:

حل المتباينة $٢ \leq |\text{س}| \leq ٥$

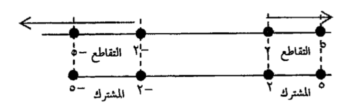
هذه المتباينة تكافئ:

$٢ \leq |\text{س}|$ و $|\text{س}| \leq ٥$

وبعد فك القيمة المطلقة فإن مجموعة الحل:

$\{\text{س} \geq ٢ \text{ أو } \text{س} \leq -٢\}$ (و) $\{-٥ \leq \text{س} \leq ٥\}$

وعلى خط الاعداد



والمشترك:

مجموعة الحل: { س: - ٥ ≤ س ≤ - ٢ ، ٢ ≤ س ≤ ٥ }

وعلى خط الاعداد كما هو أعلاه.

وكفترات [- ٥ ، - ٢] ∪ [٢ ، ٥] فقط

سادساً: حل متباينات تحتوي اقترانات أكبر عدد صحيح:

مثال:

حل المتباينة ٢ < [س + ١] < ٤

بما أن قيمة اقتران أكبر عدد صحيح تساوي دائماً عدداً صحيحاً

فإن: [س + ١] = ٣ حيث ٣ تقع بين ٢ ، ٤ هكذا:

٢ < ٣ < ٤

وحيث أن [س] ⟸ (تعرف بعد الفك) ن ≤ س < ن + ١ لكل ن ∈ ص

فإن ٣ ≤ س + ١ < ٤

- ١ - ١ - ١

٢ ≤ س < ٣

مجموعة الحل: {س: ٢ ≤ س < ٣ }

وعلى خط الاعداد

وكفترة: [٢ ، ٣)

مثال:

حل المتباينة ٣ > [٣ س + ١] ≥٤

بما أن المتباينة [٣ س + ١] = ٤ {≥ تنفي المساواة }

فإن وحسب التعريف العام لب] ⟵ ن ≥ س > ن + ١

فإن ٤ ≥ ٣ س + ١ > ٥

- ١ - ١ - ١

٣ ≥ ٣ س > ٤

∴ ٣/٣ ≥ ٣/٣ > ٤/٣

١ ≥ س > ٤/٣

مجموعة الحل: {س: ١ ≥ س > ٤/٣}

وعلى خط الاعداد ∞ ١ ٤/٣ - ∞

وكفترة [١ ، ٤/٣)

(٩- ٣) حل نظام من متباينات خطية بمتغيرين:

لنبدأ بالمتباينة الخطية بمتغيرين:

كما أن هناك معادلات خطية بمتغيرين مثل ٢ س + ٣ ص = ٦

فإنه يوجد متباينات خطية بمتغيرين مثل ٢ س + ٣ ص ≤ ٦ على سبيل المثال ويلاحظ أون الطرف الأيمن لكل من المعادلة والمتباينة متكافئين. لذلك تسمى المعادلة ٢ س + ٣ ص = ٦ المعادلة المناظرة أو المرافقة للمتباينة ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

وبشكل عام يوجد لكل متباينة خطية بمتغيرين معادلة مناظرة (مرافقة) بمتغيرين أيضاً بعد استبدال رمز علاقة الترتيب (رمز التباين) بتساوي.

مثال:

لو أن سلمى طلبت من والدتها نقوداً لشراء (٣) دفاتر و(٤) أقلام ولبت والدتها الطلب وأعطتها ١٢٠ قرشاً فقط لشراء ما تحتاجه من الدفاتر والأقلام، ثم أوصتها قائلة لها: اشتري ما تشائين وما توفيره فهو لك لكن لا تطلبي أكثر مهما كان السبب.

لا بُد أن سلمى ستفترض أن ثمن شراء الدفتر = س قرشاً

وثمن شراء القلم = ص قرشاً

ولكونها لا تود اطلاقاً أن تدفع جميع المبلغ الذي تملكه والبالغ ١٢٠ قرشاً فتكون تكلفة المشتريات هي ٣ س + ٤ ص وحتى لا تزيد (تساوي أو أقل) هذه التكلفة عن المبلغ المخصص لذلك والبالغ ١٢٠ قرشاً، فإن:

٣ س + ٤ ص ≥ ١٢٠ وتسمى هذه العلاقة متباينة خطية بمتغيرين، وحل هذه المتباينة سيُنتج عدداً من الأزواج المرتبة كحلول كما يلي:

س	٣	٥	...	٢
ص	٤	٦	...	١٥

كون ٣ (٣) + ٤ (٤) = ٢٥ ≥ ١٢٠

كون ٣ (٥) + ٤ (٦) = ٣٩ ≥ ١٢٠

.

.

.

كون ٣ (٢٠) + ٤ (١٥) = ١٢٠ ≥ ١٢٠

لذلك فالحلول عديدة وتكاد تكون غير منتهية.

ويمكن أن توضح هذه الحلول بنصف مستوى بالتمثل البياني هكذا: وهذا ما يسمى الحل البياني للمتباينة الخطية الواحدة وبمتغيرين.

مثال:

أوجد منطقة الحل للمتباينة ٢ س + ص ≤ ٤

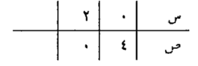
نرسم أولاً المعادلة المناظرة أو المرافقة وهي ٢ س + ص = ٤

وهذا بدوره يمثل خط مستقيم (وعندما تحتوي المتباينة أو المساواة مثل ≤ أكبر أو يساوي فالخط متصل أو مستمر) يقسم المستوى الديكارتي أو السطح البياني الى قسمين أحدهما منطقة الحل والآخر لا!

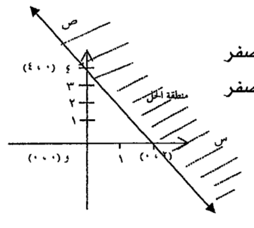
فنصف المستوى الذي يحقق المتباينة ٢ س + ص ≤ ٤ يسمى منطقة الحل كما يلي:

لرسم المعادلة المرافقة ٢ س + ص = ٤.

والمعادلة المرافقة تنتج بوضع = بدلاً من ≤ كما هو واضح أعلاه.



س	٠	٢
ص	٤	٠



لإيجاد ص نعدم ص أي نفرض س = صفر

لإيجاد س نعدم ص أي نفرض ص = صفر

كما في الجدول أعلاه.

بما أن الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المناظرة أو المرافقة يقسم المستوى الى نصفين فإن أحدهما منطقة للحل كما أسلفنا.

ولمعرفة أي من النقطتين هو منطقة الحل نحقق نقطة الأصل و (٠ ، ٠) في المتباينة، فإذا حققت النقطة المتباينة فالنصف الذي يحويها هو منطقة الحل وإذا لم نحققها فالنصف الآخر هو منطقة الحل؛

هكذا: ٢ س + ص ≤ ٤

٢ (٠) + ٠ ≤ ٤ ؟

٠ ≤ ٤ ؟ الجواب لا

فنصف المستوى الذي لا يحتوي نقطة الأصل هو منطقة الحل. والخط المتنقل يقع ضمن منطقة الحل، لذلك نظلله كما في الشكل.

ملحوظة هامة:

نؤكد بأن المتباينة اذا استوفت المساواة مثل س + ص ≤ ٥ فالخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المرافقة س + ص = ٥ متصل، وإذا لم تحقق المتباينة المساواة مثل س + ص < ٥ مثلاً فالخط الذي يمثل المعادلة المرافقة س + ص = ٥ متقطع كما يلي:

مثال:

مثّل منطقة الحل للمتباينة بيانياً في المستوى الديكارتي:

س + ٢ ص < - ٦

المعادلة المرافقة س + ٢ ص = - ٦

والخط الذي يمثلها متقطع كون المتباينة س + ٢ ص < - ٦ لا تحتوي المساواة.

نرسم المعادلة المرافقة أو المناظرة هكذا:

س	٠	- ٦
ص	- ٣	٠

لإيجاد ص نعدم س ؛ س = صفر

لإيجاد س نعدم ص ، ص = صفر

نعوض نقطة الأصل في المنحنى

س + ٢ ص > - ٦

٠ + ٢ (٠) >؟ - ٦

٠ >؟ - ٦

الجواب لا

منطقة الحل لا يشتمل نقطة الأصل

هذا ويمكن أن يختص أحد المتغيرين من المتباينة كون مُعامله يساوي صفر

مثل: س ≥ ٥ ، ص ≤ - ١ ، س > صفر وهكذا...

سؤال لا بُدَّ منه:

هل المتباينة س ≥ ٥ خطية بمتغيرين أم لا ؟

الجواب: نعم والسبب والتفسير كما يلي:

انها خطية وبمتغيرين هكذا :

١ س + ٠ ص ≥ ٥

وكذلك المتباينة ص ≤ - ١

انها خطية وبمتغيرين هكذا :

٠ س + ١ ص ≤ - ١

وهكذا..

مثال:

مثّل بيانياً مجموعة الحل (منطقة الحل) للمتباينة:

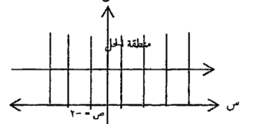
ص ≤ - ٢

المعادلة المناظرة   ص = - ٢

وبما أنها خطية لأنها   ٠ س + ص = - ٢

والخط متصل

نرسمه هكذا:



ونعوض نقطة الأصل في المتباينة

ص ≤ - ٢

هل ٠ + ٠ ≤؟ - ٢

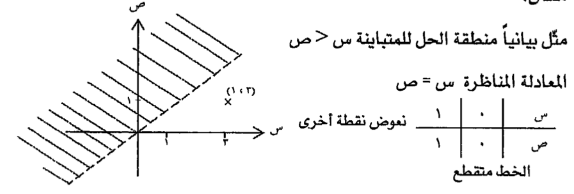
الجواب: نعم

فمنطقة الحل تحوي نقطة الأصل نظللها هكذا:

ملحوظة:

إذا مرّ الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة المناظر في نقطة الأصل فإن تمثيل المتباينة يكون كما يلي:

مثال:



مثّل بيانياً منطقة الحل للمتباينة س < ص

المعادلة المناظرة س = ص

س	٠	١
ص	٠	١

نعوض نقطة أخرى

الخط متقطع

الآن لمعرفة منطقة الحل نعوض نقطة غير نقطة الأصل كون المستقيم يمر بها ولتكن (٣ ، ١) في المتباينة

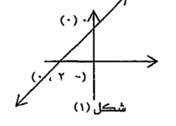
٣ $\overset{?}{<}$ ١ الجواب: لا

فمنطقة الحل لا تحوي النقطة (٣ ، ١) نظللها بالشكل.

مثال:

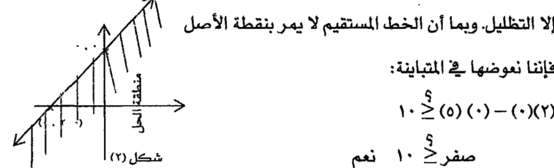
ظلل منطقة حل المتباينة الآتية على المستوى الديكارتي

٢ ص − ٥ س ≥ ١٠ كما في الشكل الأول.



شكل (١)

حيث أنها ممثلة على السطح البياني فلم يبق من الحل إلا التظليل. وبما أن الخط المستقيم لا يمر بنقطة الأصل فإننا نعوضها في المتباينة:



شكل (٢)

(٢)(٠) − (٠) (٥) $\overset{?}{\geq}$ ١٠

صفر $\overset{?}{\geq}$ ١٠ نعم

فمنطقة الحل هو ضعف المستوى الذي يحتوي نقطة الأصل كما في الشكل (٢)

ملحوظة:

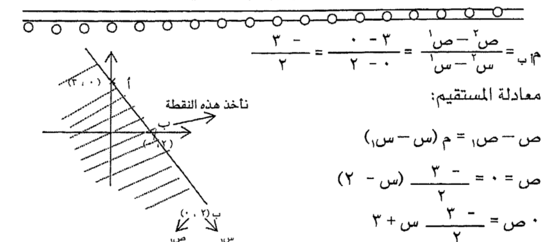
ومن الجدير بالذكر أن العكس صواب، أي من التمثيل البياني لمنطقة الحل يمكن ايجاد المتباينة الخطية كما في المثال:

مثال:

اكتب المتباينة التي يمثل منطقة الحل كما في الشكل.

أولاً: نجد معادلة الخط المستقيم الذي يمثل

المعادلة المناظرة هكذا وفق الهندسة التحليلية



$م_{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{٠ - ٢} = \frac{-٣}{٢}$

معادلة المستقيم:

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

$ص - ٠ = \frac{-٣}{٢} (س - ٢)$

$\therefore ص = \frac{-٣}{٢} س + ٣$

والآن نضع ≤ ، ≥ حسب تعويض نقطة الأصل حيث تقع في منطقة الحل.

هل ص $\frac{-٣}{٢}$ س + ٣ هي المتباينة المطلوبة

بالتعويض (٠ ، ٠) في المتباينة ٠ $\overset{?}{\geq}$ $-\frac{٣}{٢}$ (٠) + ٣ ⟵ الجواب لا

∴ المتباينة المطلوبة هي: ص ≥ $-\frac{٣}{٢}$ س + ٣ .

والآن نأتي الى حل نظام من المتباينات الخطية بمتغيرين:

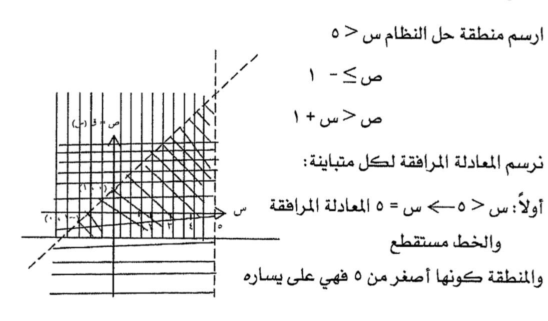
والنظام في العادة يحتوي متباينين أو أكثر، ولإيجاد منطقة الحل للنظام فإذا نظلل منطقة الحل لكل متباينة في النظام فتكون منطقة الحل هي المنطقة الناتجة من تقاطع مناطق الحل للمتباينات معاً أو منطقة التظليل المشتركة كما يلي:

مثال:

ارسم منطقة حل النظام س < ٥

ص ≥ - ١

ص < س + ١



نرسم المعادلة المرافقة لكل متباينة:

أولاً: س < ٥ ⟵ س = ٥ المعادلة المرافقة

والخط مستقطع

والمنطقة كونها أصغر من ٥ فهي على يساره

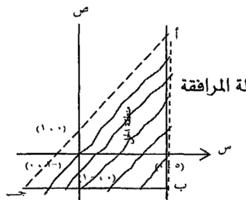
كما في الحل.

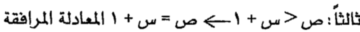
ثانياً: ص ≤ - ١ ⟵ ص = - ١ المعادلة المرافقة

والخط متصل

والمنطقة كونها أكبر من - ١ فهي أعلاه

كما في الشكل.





ثالثاً: ص < س + ١ ⟵ ص = س + ١ المعادلة المرافقة

س	٠	١ -
ص	١	٠

لإيجاد ص نعدم س ، س = ٠

لإيجاد س نعدم ص ، ص = صفر

والخط متقطع

فمنطقة الحل بلا رتوش هي ⟵

مثال:

ارسم منطقة الحل للنظام:

س ≤ صفر

ص ≤ صفر

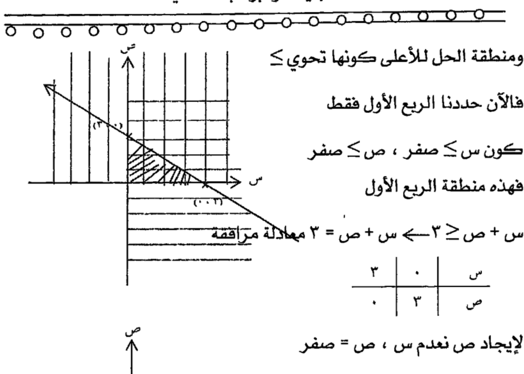
س + ص ≤ ٣

س ≤ صفر ⟵ س = صفر المعادلة المرافقة وهي محور الصادات

ومنطقة الحل على اليمين كونها تحوي ≤

ص ≤ صفر ⟵ ص= صفر المعادلة المرافقة

وهي محور السينات



ومنطقة الحل للأعلى كونها تحوي ≤

فالآن حددنا الربع الأول فقط

كون س ≤ صفر ، ص ≤ صفر

فهذه منطقة الربع الأول

س + ص ≤ ٣ ← س + ص = ٣ معادلة مرافقة

س	٠	٣
ص	٣	٠

لإيجاد ص نعدم س ، ص = صفر

لإيجاد س نعدم ص ، ص = ٠

والخط متصل

والآن نفرز منطقة الحل فلا رتوش

فمنطقة الحل محصورة في الربع الأول فقط.

(٩- ٤) البرمجة الخطية Linear Programming:

من المعروف أن أصحاب المنشآت الصناعية والتجارية ومديريها على السواء يهدفون الى تحقيق الأرباح بل أقصاها، وهذا لا يتأتى لهم برفع الأسعار غير المبررة لدى المستهلكين أو بالانتاج الكبير من السلع كما يظن البعض من الآخرين، وانما يتم لهم ذلك بما يسمى الانتاج الأمثل. "الانتاج بتكلفة أقل ما يمكن وبأسعار مقبولة لدى المستهلكين بأذواقهم المتباينة".

ومما يساعد على عدم تحقيق ما يريدون من أرباح في بعض الأحيان وجود قيود وعوائق تتعلق بحجم طاقة المنشأة الانتاجية -إذا كانت المنشأة صناعية على سبيل المثال- مثل حجم المصنع ومساحة مخازنه وعدد ساعات العمل المتاحة للانتاج

والتشغيل والأيدي العاملة الماهرة الرفيعة وعدد الآلات المتواجدة في المصنع والموارد الأولية المتوفرة في الأسواق ورأس المال المستثمر في عملية الانتاج وعملية التسويق للانتاج وغيرها من القيود.

لذا كان لا بد من وجود برنامج خطي تسير عليه المنشأة وسياسة اقتصادية ناجحة تترجم هذا البرنامج على أرض الواقع، واضعوها (السياسة الاقتصادية) أو البرنامج الخطي هم الخبراء والاقتصاديون، من هنا تولدت البرمجة الخطية كأسلوب رياضي يُستخدم لإيجاد أكبر قيمة للربح (تعظيم الربح) أو أقل قيمة للتكلفة (تقليل التكلفة) لاقتران مُطى في ظل مجموعة من القيود والتي تفرضها طبيعة المشكلة للوصول الى الانتاج الأمثل والتي يمكن صياغتها على صورة عدد من المتباينات الخطية وبالاختصار المفيد، نستخدم البرمجة الخطية لتحديد الحجم الأمثل للمشروع الذي يحقق أقصى الأرباح بالالتزام بقيود مفروضة عليه، ولا تنسى أن: تعظيم الربح يتم بتقليل التكلفة الى حدها الأدنى أو بزيادة الايراد الى حده الأقصى وكلاهما له نفس المعنى.

والبرنامج الخطي يتكون دائماً من ثلاثة أجزاء وهي وعلى الترتيب:

(i) **الاقتران الهدف** Objective Function:

وهو الاقتران الذي يُراد جعله نهاية عظمى فقد.

(ii) **مجموعة القيود أو القيود الهيكلية** Structural Contraints:

وهي القيود التي تفرضها طبيعة المشكلة والمتعلقة بطاقة المنشأة الانتاجية من حيث عدد ساعات العمل اليومي وحجم رأس المال المستثمر وغيرها...

(iii) **متطلبات عدم السالبية** Non- Negativity Requirements:

وتفسيرها بكل يسر وسهولة؛ أن المنشأة لا تنتج إلا عدداً من الوحدات يكون موجباً أو صفر أي أن الانتاج لا يُعقل أن يكون سالباً!!!

ولكتابة البرنامج الخطي نبدأ بالمثال:

مثال:

مصنع لانتاج الحقائب والمعاطف الجلدية، يتوفر لديه ٥٠ م^{٢} من الجلد الخام يومياً، فإذا كانت صناعةالحقيبة الواحدة تحتاج الى ١ م^{٢} من الجلد الخام، والى ٣ ساعات عمل يومياً وتعطي الحقيبة عند بيعها ربحاً مقداره ديناران، وكانت صناعة المعطف الواحد تتطلب ٢ م^{٢} من الجلد الخام والى ٤ ساعات عمل يومياً ويعطي المعطف عند بيعه ربحاً مقداره ٤ دنانير، فإذا علمت أن ساعات العمل المتاحة في المصنع ١٨ ساعة يومياً.

"اكتب برنامجاً خطياً لهذه المسألة"

نفرض أن المصنع يريد انتاج س حقيبة يومياً.

ويريد انتاج ص معطف يومياً

نرتب المعلومات المُعطاة هكذا:

حقائب		معاطف		المتوفر من الجلد الخام يومياً	
س		ص			
١ س	+	٢ ص	≥	٥٠	(١)
				ساعات العمل المتاحة يومياً	
٣ س	+	٤ ص	≥	١٨	(٢)

لانتاج س حقيبة نحتاج س × ١ = ١ س م^{٢}

ولانتاج ص معطف نحتاج ص × ٢ = ٢ ص م^{٢}

جمعاً ١ س + ٢ ص ≥ ٥٠ كما هو أعلاه

وكذلك ٣ س + ٤ ص ≥ ١٨ كما هو أعلاه

الاقتران الهدف:

الربح من الحقائب = ٢ × س = ٢ س دينار

والربح من المعاطف = ٤ × ص = ٤ ص دينار

فالاقتران الهدف ر = ٢ س + ٤ ص دينار

والآن نترجم المعلومات السابقة الى برنامج خطي كما يلي:

المقصود:

١ س + ٢ ص ≥ ٥٠ كون المصنع يستخدم ٥٠ م^{٢} أو اقل واما أكثر فلا!

٣ س + ٤ ص ≥ ١٨ كون العمال يستطيعون العمل ١٨ ساعة فأقل!

الاقتران الهدف:

ر = ٢ س + ٤ ص دينار حيث ر الربح

قيود عدم السالبية:

س ≤ صفر انتاج الحقائب ليس سالباً اطلاقاً بل موجب أو صفر

وكذلك ص ≤ صفر انتاج المعاطف ليس سالباً اطلاقاً بل موجب أو صفر

ملحوظة جديرة بالانتباه:

السلع من حيث الانتاج نوعان هما:

الأول: سلع لا يمكن انتاجها إلا كأعداد صحيحة موجبة مثل الأجهزة الكهربائية والثلاجات والحقائب المدرسية، حيث لا معنى لنصف ثلاجة أو لربع حقيبة لذا فإن المتغيرات الدالة عليها (س ، ص) تكون أعداد منفصلة أي أعداد صحيحة مستقلة عن بعضها.

الثاني: سلع يمكن انتاجها بأعداد حقيقة موجبة أي يمكن أن تكون على شكل أعداد كسرية كعدد أكياس أو الحبوب بأنواعها إذ يوجد هناك نصف كيس سكر وربع كيس أرز وثلث طن قمح وهكذا...

لذا فإن المتغيرات الدالة على عدد انتاجها تكون متصلة أي صحيحة وكسرية أيضاً.

(٩- ٥) الطريقة الهندسية لحل البرنامج الخطي بمتغيرين Graphical Method:

ترتبط هذه الطريقة بالتمثيل البياني للمتباينات الخطية كما يلي:

مثال:

ينتج مصنع يومياً صفين من الثلاجات هما الكبير الحجم والصغير الحجم ويستخدم لهذا الغرض معملين.

فإذا كان انتاج ثلاجة كبيرة يحتاج الى ٦ ساعات عمل في المعمل الأول

و ٣ ساعات عمل في المعمل الثاني

وانتاج ثلاجة صغيرة يحتاج الى ساعتين عمل في المعمل الأول

و ٥ ساعات عمل في المعمل الثاني

وإذا كانت الطاقة الانتاجية للمعملين لا تزيد عن ١٢ ساعة، ١٥ ساعة يومياً وعلى الترتيب. أوجد عدد الثلاجات الواجب انتاجها يومياً لتحقيق أكبر ربح ممكن علماً بأن ربح المصنع في الثلاجة الكبيرة ٧٥ ديناراً وفي الثلاجة الصغيرة ٥٠ ديناراً.

الحل:

نفرض أنه ينتج س ثلاجة كبيرة ، ص ثلاجة صغيرة

نرتب المعلومات المعطاة:

	(س) الحجم الكبير		(ص) الحجم الصغير		الطاقة الانتاجية بالساعات
المعمل الأول	٦ س	+	٢ ص	≥	١٢
المعمل الثاني	٣ س	+	٥ ص	≥	١٥

الاقتران الهدف: ر = ٧٥ س + ٥٠ ص

عدد السالبية: س ≤ صفر حيث الانتاج ليس سالباً على الاطلاق.

ص ≤ صفر حيث الانتاج ليس سالباً على الاطلاق.

الآن نمثل المتباينات على المستوى الديكارتي معاً وعلى سطح واحد.

علماً بأن عدم السالبية (س ≤ صفر ، ص ≤ صفر) يحصر منطقة الحل في الربع الأول حيث لا انتاج سالب على الاطلاق!

أولاً: نمثل المتباينة الأولى:

٦ س + ٢ ص ≤ ١٢

المعادلة المرافقة:

$$\frac{٦ \text{ س} + ٢ \text{ ص} = ١٢}{٢}$$

٣ س + ص = ٦

س	٠	٢
ص	٦	٠

وحيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة:

كون ٦ (٠) + ٢ (٠) ≤ ١٢

فمنطقة الحل للمتباينة باتجاه نقطة الأصل .

ثانياً: نمثل المتباينة الثانية:

$$١٥ \geq ٣ \text{ س} + ٥ \text{ ص}$$

المعادلة المرافقة ٣ س + ٥ ص = ١٥

س	٠	٥
ص	٣	٠

وحيث أن نقطة الأصل تحقق المتباينة

كون ٣ (٠) + ٥ (٠) ≤ ١٥

فمنطقة الحل للمتباينة باتجاه نقطة الأصل

فمنطقة الحل للنظام من المتباينات هو الشكل الرباعي أ ب و جـ كما في الشكل.

ولأن الثلاجات من السلع التي لا تنتج إلا بأعداد صحيحة سواء أكانت صغيرة أو كبيرة فإننا نبحث عن الأزواج المرئية ذوات المساقط الصحيحة داخل منطقة الحل لتعظيم الربح.

سنجد أولاً احداثيات نقطة التقاطع أ لنرى هل تنضمُ الى الأزواج المرتبة عند تعظيم الربح أم لا ؟

وذلك بحل المعادلتين المرافقتين للمتباينين بالحذف هكذا:

٣ س + ص = ٦ (١)

∓ ٣ س ∓ ٥ ص = ∓ ١٥ (٢)

− ٤ ص = − ٩

ص = $\frac{٩}{٤}$ ليس عدداً صحيحاً اذن لا يصلح أن يكون عدداً يمثل انتاج الثلاجات

وكذلك ٣ س + ص = ٦

∴ ٣ س + $\frac{٩}{٤}$ = ٦

$٣ س = \frac{٦}{١} - \frac{٩}{٤} = \frac{٢٤ - ٩}{٤} = \frac{١٥}{٤}$

$\therefore \frac{٣ س}{١} = \frac{١٥}{٤}$ وبالضرب التبادلي

١٢ س = ١٥

س = $\frac{١٥}{٤}$ ليس عدداً صحيحاً فلا يصلح أن يكون عدداً يمثل انتاج الثلاجات

$\therefore$ النقطة أ ($\frac{١٥}{١٢}$ ، $\frac{٩}{٤}$)

لا تدخل في نقط تعظيم الربح كما في الجدول التالي:

والآن نقوم بتنظيم الربح بإيجاد قيمة اقتران الهدف الذي يمثل أقصى ربح ونناقش كل نقطة مساقطها أعداد صحيحة (الثلاجات تنتج بأعداد صحيحة فقط) هكذا:

	و	د	ب	م	هـ	ن	ل	جـ
عدد الثلاجات الكبيرة س	٠	١	٢	٠	١	٠	١	٠
عدد الثلاجات الصغيرة ص	٠	٠	٠	١	١	٢	٢	٣
أكبر ربح	٠	٧٥	١٥٠	٥٠	١٢٥	١٠٠	١٧٥	١٥٠

ونعوض كل زوج مرتب أعلاه في اقتران الهدف لتحقيق أكبر قيمة للربح هكذا:

بما أن ر = ٧٥ س + ٥٠ ص

فإن ر و = ٧٥ (٠) + ٥٠ (٠) = صفر لا ربح كونه لا انتاج / مفروض أصلاً

ر د = ٧٥ (١) + ٥٠ (٠) = ٧٥ ديناراً

ر ب = ٧٥ (٢) + ٥٠ (٠) = ١٥٠ ديناراً

ر م = ٧٥ (٠) + ٥٠ (١) = ٥٠ ديناراً

ر هـ = ٧٥ (١) + ٥٠ (١) = ١٢٥ دينار

ر ن = ٧٥ (٠) + ٥٠ (٢) = ١٠٠ دينار

ر ل = ٧٥ (١) + ٥٠ (٢) = ١٧٥ دينار

ر و = ٧٥ (٠) + ٥٠ (٣) = ١٥٠ دينار

ومن الجدول تبين أن الربح اليومي يكون أكبر ما يمكن ومقداره ١٧٥ دينار عندما ينتج المصنع ثلاجة من الحجم الكبير وثلاجتين من الحجم الصغير.

أحياناً وعندما يكون المتغيران س ، ص منفصلين والنقط في منطقة الحل عديدة نكتفي عند تعظيم الربح بالنقط الركنية (الموجودة في الزوايا والأركان) كون الانتاج الأمثل (الذي يحقق أقصى الأرباح) يتمثل بالنقط البعيدة عن نقطة الأصل وهذا ما يوضحه المثال التالي:

مثال:

ينتج مشغل نوعين من القمصان يومياً، الأول رجالي ويربح بالقميص عند بيعه ٣ دنانير والثاني ولادي ويربح بالقميص عند بيعه ٢ دينار، فإذا كان هذا المشغل قادراً على انتاج ما لا يزيد عن ٢٠ قميصاً من النوعين يومياً، فكم قميص من كل نوع يجب أن ينتج يومياً ليتحقق أكبر ربح ممكن، شرط أن لا ينتج أقل من ٤ قمصان من النوع الأول يومياً؟

استخدم الطريقة الهندسية:

الحل:

نفرض أنه ينتج من القمصان الرجالي يومياً س قميص

ومن القمصان الولادي يومياً ص قميص

نرتب المعلومات المعطاة: قمصان رجالي (س) قمصان ولادي (ص) الطاقة الانتاجية

العدد   س + ص ≤ ٢٠   كونه لا ينتج أكبر من ٢٠

س ≥ ٤   كونه لا ينتج أقل من ٤ رجالي

عدم السالبية   ص ≥ صفر   ممكن أن لا ينتج أي قميص من هذا النوع (الولادي)

الاقتران الهدف: ر = ٣ س + ٢ ص   أكبر ما يمكن

نقوم الآن بتمثيل المتباينات   س + ص ≤ ٢٠   (١)

س ≥ ٤   (٢)

ص ≥ صفر   (٣)

على المستوى الديكارتي نفسه

أولاً: نمثل س + ص ≤ ٢٠

المعادلة المرافقة

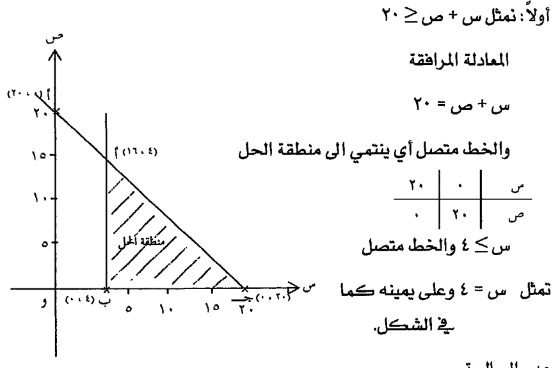
س + ص = ٢٠

والخط متصل أي ينتمي الى منطقة الحل

س	٠	٢٠
ص	٢٠	٠

س ≥ ٤ والخط متصل

تمثل س = ٤ وعلى يمينه كما في الشكل.



عدم السالبية.

أي س ≥ صفر كون س ≥ ٤

ص ≥ صفر يحصران منطقة الحل في الربع الأول

وبما أن عدد القمصان المنتجة يجب أن يكون أعداد صحيحة فقط، إذ لا يعقل انتاج نصف قميص ثم تسويقه كونه معيب ويعود الى المشغل حال رؤيته بهذا الشكل.

لذا فإننا نعظم الربح بأزواج مرتبة مساقطها أعداد صحيحة وللنقط الركنية فقط:

نجد احداثيات النقطة أ : عندما س = ٤ فإن س + ص = ٢٠

ومنها ٤ + ص = ١٠ ⟵ ص = ١٦

∴ احداثيات أ (٤ ، ١٦)

وكون الحلول (الأزواج المرتبة عديدة، فإن الانتاج الأمثل يتمثل بالأطراف، لذا فإننا نستبعد نقطة الأصل منها حيث لا انتاج ولا أرباح تمثلها نقطة الأصل، كما في الجدول التالي:

	ب	جـ	أ	
س	٤	٢	٤	
ص	٠	٠	١٦	
الربح	١٢	٦٠	٤٤	

بما أن ر = ٣ س + ٢ ص

فإن $ر_{ب}$ = ٣ (٤) + ٢ (٠) = ١٢ دينار

$ر_{جـ}$ = ٣ (٢٠) + ٢ (٠) = ٦٠ دينار

$ر_{أ}$ = ٣ (٤) + ٢ (١٦) = ١٢ + ٣٢ = ٤٤ دينار

ومن الجدول يتبين أن الربح اليومي يكون أكبر ما يمكن عندما ينتج المشغل ٢٠ قميص رجالي، ولا ينتج أي قميص ولادي إلا إذا تغيرت الظروف الاقتصادية والأحوال المعيشية للزبائن الكرام.

(٩ - ٦) الطريقة الجبرية لحل البرنامج الخطي بمتغيرين Algebric method:

ترتبط هذه الطريقة بعمليات الصف البسيط Simple Row Operations وهذه العمليات قادرة على تحويل أنظمة المعادلات الخطية الى أنظمة أخرى مكافئة لها بقصد المساعدة في حل البرنامج الخطي المطلوب.

ولتوضيح هذه الطريقة نناقش هذا المثال بخطوات مرتبة ومنسقة هكذا:

مثال:

تريد شركة أن تنتج نوعين من السلع، ويحتاج انتاج الوحدة من النوع الأول الى ساعتي عمل في قسم التشغيل الآلي، وساعتي عمل في قسم التغليف اليدوي، في حين تحتاج الوحدة من النوع الثاني الى ٣ ساعات عمل في قسم التشغيل الآلي، وساعة عمل واحدة في قسم التغليف اليدوي.

فإذا فُرض أن ربح الشركة سيكون ٦ دنانير للوحدة من النوع الأول

و ٨ دنانير للوحدة من النوع الثاني

ولأسباب فنية لا يمكن العمل بقسمي التشغيل الآلي والتغليف اليدوي أكثر من ١٢ ساعة ، ٨ ساعات يومياً على الترتيب.

كم وحدة من كل نوع يجب أن تنتجها الشركة يومياً حتى نجعل ربحها الكلي أكبر ما يمكن؟ باستخدام الطريقة الجبرية.

تتم خطوات الحل هكذا:

نفرض أن عدد الوحدات المنتجة من النوع الأول س وحدة.

وعدد الوحدات المنتجة من النوع الثاني ص وحدة

وبذا يكون الاقتران الهدف ر = ٦ س + ٨ ص ديناراً.

نرتب المعلومات المعطاة   النوع الأول   النوع الثاني   عدد الساعات المتاحة

س   ص

قسم التشغيل الآلي   ٢ س   +   ٣ ص   ≥   ١٢

قسم التغليف اليدوي   ٢ س   +   ١ ص   ≥   ٨

مع الانتباه لعدم السالبية حيث المصنع لا ينتج اطلاقاً كميات سالبة بل انتاجه موجب أو صفر (في حالة توقفه عن الانتاج)

أي أن س ≤ صفر   ،   ص ≤ صفر

نبدأ باستخدام متغيرات وهمية جديدة لتحويل المتباينات والاقتران الهدف الى نظام من المعادلات الخطية باستثناء المتباينات المتعلقة بعدم السالبية (س ≤ صفر ، ص ≤ صفر) هكذا:

٢ س + ٣ ص + ل + (٠) ك + (٠) ح = ١٢ ⟵ (١)

٢ س + ١ ص + (٠) ل + ك + (٠) ح = ٨ ⟵ (٢)

- ٦س - ٨ ص + (٠) ل + (٠) ك + ح = صفر ⟵ (٣)

وكما تلاحظ أن معاملات المتغيرات الوهمية الجديدة، يُعدم منها متغيران (معاملاتها أصفار) في كل صف.

ثم نقوم بترتيب المعاملات والثوابت كما هو مبين بالجدول التالي:

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
٢	٣	١	٠	٠	١٢
٢	١	٠	١	٠	٨
- ٦	- ٨	٠	٠	١	٠

الآن نبحث عن الركيزة الأولى، والتي تكون في العامود الذي في صفه الأخير أقل عدد سالب، وهنا الركيزة في العامود ص الثاني (عامود معاملات ص)، أي أن الركيزة هي ٣ أو ١ وحتى نختار الركيزة بطريقة سليمة فإننا نقسم معاملات عامود الثوابت على عاملات عامود ص وخارج القسمة الأقل يدل على الركيزة هكذا:

١٢ ÷ ٣ = ٤

٨ ÷ ١ = ٨

وبما أن ٤ أقل من ٨ فالمقسوم عليه (٣) هو الركيزة في الصف الأول والركيزة الأخرى في الصف الثاني وليست بنفس صف الأولى، أي أن الركائز في صفين وليس في صف واحد وهما هنا (٣) ، (٢) كما في الشكل الأول

في الصف الأول في الصف الثاني

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
٢	(٣)	١	٠	٠	١٢	الركيزة حولها دائرة
(٢)	١	٠	١	٠	٨	الركيزة حولها دائرة
- ٦	- ٨	٠	٠	١	٠	

وبذا نكون قد حددنا كلاً من الركيزتين بعامودها وصفها كما هو أعلاه.

نقوم الآن بالدوران حول الركائز (تعبيرات لغوية فقط) وذلك بأن نجعل قيمة كل ركيزة تساوي العدد الصحيح "١" وجميع الأعداد في عامودي معاملات س ، ص أصفاراً استعانة بعمليات الصف البسيط، والتي وردت في فصل المصفوفات والمحددات، وهذه العمليات متصلة مع بعضها البعض بكل بساطة وسهولة كما يلي:

	س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
$(\frac{١}{٣})$	٢	(٣)	١	٠	٠	١٢	نضرب الصف في $\frac{١}{٣}$
	(٢)	١	٠	١	٠	٨	
	٦ -	٨ -	٠	٠	١	٠	

	س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
وأما	$\frac{٢}{٣}$	(١)	$\frac{١}{٣}$	٠	٠	٤	نضرب الصف الأول في ٨
	(٢)	١	٠	١	٠	٨	الصف الثاني – الصف الأول
	٦ -	٨ -	٠	٠	١	٠	

جمعا

	س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
	$\frac{٢}{٣}$	(١)	$\frac{١}{٣}$	٠	٠	٤	
$(\frac{٣}{٤})$	$(\frac{٤}{٣})$	٠	$-\frac{١}{٣}$	١	٠	٤	نضربه في $\frac{٣}{٤}$
	$-\frac{٢}{٣}$	٠	$\frac{٨}{٣}$	٠	١	٣٢	

كما يلاحظ أن عامود الركيزة الأولى (ص) أصبح جاهزاً وعلى الصورة المطلوبة، ومثله سوف نجعل عامود الركيزة الثانية س هكذا:

	س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	الاجراءات
	$\frac{٢}{٣}$	(١)	$\frac{١}{٣}$	٠	٠	٤	جمعا
	(١)	٠	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{٣}{٤}$	٠	٣	نضربه في $-\frac{٢}{٣}$
	$-\frac{٢}{٣}$	٠	$\frac{٨}{٣}$	٠	١	٣٢	

	س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
	٠	(١)	$\frac{١}{٢}$	$-\frac{١}{٢}$	٠	٢	
	(١)	٠	$-\frac{١}{٤}$	$\frac{٣}{٤}$	٠	٣	
	٠	٠	$\frac{١٥}{١٦}$	$\frac{١}{٢}$	١	٣٤	

والآن حصلنا على المصفوفة التي نريد وهي:

$$\begin{matrix} ص & س \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} (1) & 0 \\ 0 & (1) \end{pmatrix} \quad \text{وتكافئ} \quad \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ مصفوفة الثوابت}$$

∴ ص = ٢

س = ٣

∴ مجموعة الحل   س = ٣ ، ص = ٢

أي أن الشركة يجب أن تنتج ٣ وحدات من النوع الأول

و ٢ وحدة من النوع الثاني

حتى تحقق ربحاً مقداره ٣٤ ديناراً.

للتحقق:

نأخذ الاقتران الهدف:

ر = ٦ س + ٨ ص

والآن ٣٤ ≟ ٦ (٣) + ٨ (٢)

٣٤ ≟ ١٨ + ١٦

الجواب نعم بالتأكيد فالحل صواب ولكن طريقة الحل مطولة كثيراً ومملة أكثر.

(٩- ٧) أمثلة محلولة على المتباينات والبرمجة الخطية

مثال (١):

أي من الجمل التالية صواب وأيها خطأ؟

(i) $-١ \geq -٧$ ⟵ خطأ

(ii) $٣ \geq ٣$ ⟵ صواب

(iii) $\sqrt{٥} \geq \sqrt{٧}$ ⟵ صواب

(iv) $٣ > \sqrt{١٦} > ٤$ ⟵ خطأ

(v) $|٤| \geq |-٥|$ ⟵ صواب

مثال (٢):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة ومثّلها على خط الاعداد

$٣س - ٢ \geq ٢س + ٥$

$٣س - ٢ \geq ٢س + ٥$

$-٢س \quad -٢س$

$س - ٢ \geq ٥$

$+٢ \quad +٢$

$س \geq ٧$

مجموعة الحل: $\{س: س \geq ٧\}$

وعلى خط الاعداد

$-\infty \quad ٧ \quad \infty$

وكفترة $س = (-\infty ، ٧]$

مثال (٣):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة المركبة:

٣ (١٢ – س) > س ⓦ ٣١ > (١ – ٢ س)

٣٦ - ٣ س > س   ٣١ > ١ - ٢ س

+٣ س + ٣ س   - ١ - ١

٣٦ > ٤ س $\frac{٣٠}{-٢} > \frac{-٢}{-٢}$ س

∴ س < ٩   س < ١٥

مجموعة الحل: { س: ٩ < س < ١٥ }

وعلى خط الاعداد

- ∞ ٩ ١٥ ∞

وكفترة س = (٩ ، ١٥)

مثال (٤):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

- ١ < - ٢ س + ٣ ≤ ٢

- ٣ - ٣ - ٣

- $\frac{١}{٢}$ (- ٤ < - ٢ س ≤ - ١)

$\frac{١}{٢}$ ≤ س < ٢   بعد تبديل رموز التباين

مجموعة الحل: {س: $\frac{١}{٢}$ ≤ س < ٢}

كفترة [$\frac{١}{٢}$ ، ٢)

وعلى خط الاعداد

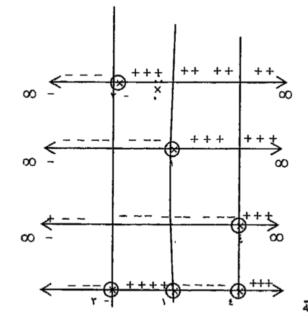
- ∞ $\frac{١}{٢}$ ٢ ∞

مثال (٥):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة:

(س + ٣) (س - ١) (س - ٤) < صفر

نبدأ بضرب الاشارات رأساً:



اشارة س + ٣

س + ٣ = صفر

٥ = - ٣ صفر الاقتران

اشارة س - ١

س - ١ = صفر

س = ١ صفر الاقتران

اشارة س - ٤

س - ٤ = صفر

س = ٤ صفر الاقتران

اشارة الطرف الأيمن من المتباينة

مجموعة الحل: {س: س < - ٣ ، ١ < س < ٤ }

كفترات (- ∞ ، - ٣[∪ (١ ، ٤)

وعلى خط الاعداد

- ∞   - ٣   ١   ٤

مثال (٦):

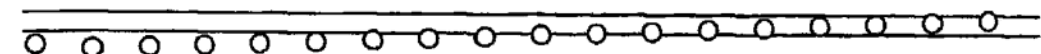
أوجد مجموعة الحل للمتباينة $\frac{١}{س}$ < ٣

نجعل الطرف الأيسر صفر

$$\frac{١}{س} - \frac{٣}{١} < \text{صفر}$$

ونجعل الطرف الأيمن اقتراناً نسبياً واحداً.

$$\frac{١ - ٣س}{س} < \text{صفر}$$

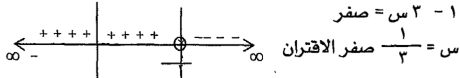


والحل مباشرة بقسمة الاشارات دون تحويلها الى ضرب:

اشارة ١ - ٣ س

١ - ٣ س = صفر

س = $\frac{١}{٣}$ صفر الاقتران



اشارة س

س = صفر صفر الاقتران

مجموعة الحل= { س: س < صفر ، س > $\frac{١}{٣}$ }

كفترات (- ∞ ، ∴) ∪ ($\frac{١}{٣}$ ، ∞) = ح − [٠ ، $\frac{١}{٣}$]

وعلى خط الاعداد

مثال (٧):

يملك سعدون ١٠٠٠ دونماً من الأراضي لزراعة الفواكه والخضار، يدر عليه دونم الفواكه ٤٠٠ دينار في الموسم، ودونم الخضار ٥٠٠ دينار، ولكن وزارة الزراعة لا تسمح بزراعة أكثر من ٤٠٠ دونماً خضار، وان الطاقة الانتاجية المتاحة في الموسم لا تزيد عن ٤٤٠٠ ساعة عمل، فإذا علمت أن الدونم المزروع فواكه يحتاج الى ٤ ساعات عمل في الموسم، وان الدونم المزروع خضار يحتاج الى ٥ ساعات عمل في الموسم. كم دونماً يزرع سعدون فواكه وكم دونم يزرعها خضار؟

"باستخدام الحل الهندسي"

الحل:

نفرض أنه يزرع س دونم فواكه ، ص دونم خضار

المتباينات	فواكه (س)	خضار (ص)		
الأرض	س + ص	≥	١٠٠٠	(١)
ساعات العمل	٤ س + ٥ ص	≥	٤٤٠٠	(٢)
قيد وزارة الزراعة	ص	≥	٤٠٠	(٣)

الاقتران الهدف: ر = ٤٠٠ س + ٥٠٠ ص

عدد السالبية: س ≥ صفر ، ص ≥ صفر } يحصران منطقة الحل في الربع الأول

الحل الهندسي:

نبدأ برسم المتباينات هكذا:

س + ص ≥ ١٠٠٠ ⟵ المعادلة المرافقة س + ص = ١٠٠٠ (١)

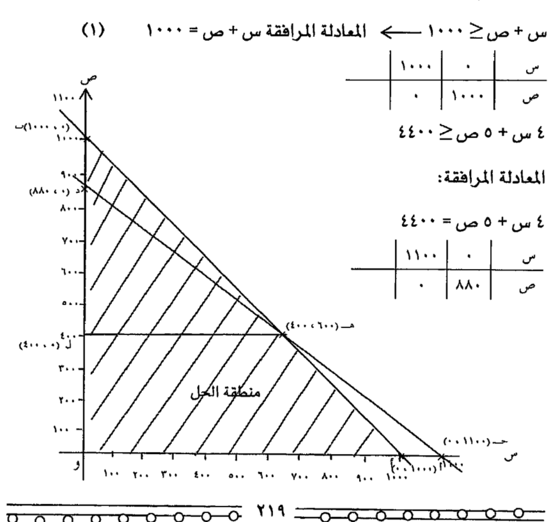
س	٠	١٠٠٠
ص	١٠٠٠	٠

٤ س + ٥ ص ≥ ٤٤٠٠

المعادلة المرافقة:

٤ س + ٥ ص = ٤٤٠٠

س	٠	١١٠٠
ص	٨٨٠	٠



نجد احداثيات التقاطع للنقطة هـ لحذف ص

- ٥ (س + ص = ١٠٠٠) (١)

٤ س + ٥ ص = ٤٤٠٠ (٢)

---

٤ س + ٥ ص = ٤٤٠٠ (٢)

جمعاً - ٥ س - ٥ ص = - ٥٠٠٠ (١)

- س = - ٦٠٠

س = ٦٠٠

لكن س + ص = ١٠٠٠

٦٠٠ + ص = ١٠٠٠

ص = ١٠٠٠ — ٦٠٠ = ٤٠٠

نرسم ص = ٤٠٠

ص = ٤٠٠

ومنطقة الحل باقي نقطة الأصل.

وهو المضلع أ هـ ل و: كما في الشكل.

والآن نعظم الربح كما في الجدول:

	أ	هـ	ل	
س مساحة الفواكه	١٠٠٠	٦٠٠	صفر	
ص مساحة الخضار	صفر	٤٠٠	٤٠٠	"وأما نقطة الأصل فلا انتاج" لذا لا تتدخل في الحل.
الربح	٤٠٠٠٠٠	٤٤٠٠٠٠ ↑	٢٠٠٠٠٠	

بما أن ر = ٤٠٠ س + ٥٠٠ ص

فإن ر أ = ٤٠٠ (١٠٠٠) + ٥٠٠ (صفر) = ٤٠٠٠٠٠

ر هـ = ٤٠٠ (٦٠٠) + ٥٠٠ (٤٠٠) = ٤٤٠٠٠٠ + ٢٠٠٠٠٠

= ٤٤٠٠٠٠

ر ل = ٤٠٠ (صفر) + ٥٠٠ (٤٠٠) = ٢٠٠٠٠٠

∴ س = ٦٠٠ دونم يجب أن يزرعها فواكه

ص = ٤٠٠ دونم يجب أن يزرعها خضار

ليحصل على أرباح قيمتها ٤٤٠٠٠٠ دينار وهي القصوى.

=

مثال (٨):

مثّل المتباينة الخطية ٣ س ≤ ٤ ص بيانياً

أولاً: نجد المعادلة المرافقة وهي ٣ س = ٤ ص

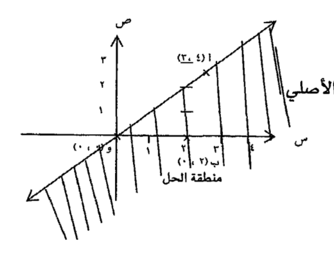
والخط المستقيم متصل.

وبعد ذلك نقوم ببناء الجدول التالي:

س	٠	٤
ص	٠	٣

٣ (٤) = ٤ ص ⟵ ٤ ص = ١٢

ص = ٣



وبما أن الخط المستقيم يمر بنقطة الأصلي

لذلك نحقق نقطة أخرى

لمعرفة نصف المستوى الذي

يمثل منطقة الحل

هكذا: نحقق ب (٢ ، ٠)

(٣) (٢) $\overset{?}{>}$ ٤ (٠)

٦ $\overset{?}{>}$ صفر نعم

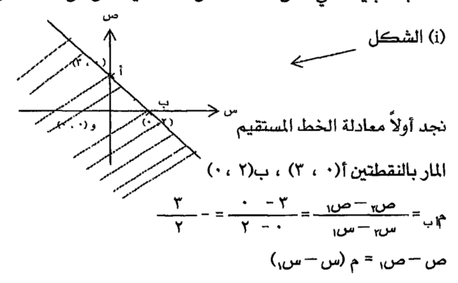
منصف المستوى الذي يحتوي ب (٢ ، ٠) هو منطقة الحل

والمستقيم ينتمي الى منطقة الحل أيضاً.

مثال (٩):

اكتب المتباينة التي تمثل منطقة الحل المظللة في كل من الأشكال التالية:

(i) الشكل



نجد أولاً معادلة الخط المستقيم

المار بالنقطتين أ(٠ ، ٣) ، ب(٢ ، ٠)

$م_{أب} = \frac{ص_٢ - ص_١}{س_٢ - س_١} = \frac{٣ - ٠}{٠ - ٢} = - \frac{٣}{٢}$

$ص - ص_١ = م (س - س_١)$

ونأخذ النقطة ب (٢ ، ٠) تكون معادلة المستقيم

$ص - ٠ = - \frac{٣}{٢} (س - ٢)$

$٢ (ص = - \frac{٣}{٢} س + ٣)$

أي أن ٢ ص = - ٣ س + ٦

أو: ٣ س + ٢ ص = ٦ المعادلة المرافقة.

وبما أن الخط المستقيم متصل فإنه يدخل بالحل والمتباينة تشمل المساواة أيضاً.

فهناك اختياران إما أن تكون المتباينة:

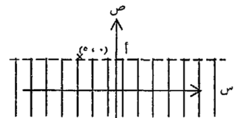
٣ س + ٢ ص ≤ ٦ (أو) ٣ س + ٢ ص ≥ ٦

نحقق نقطة الأصل في كل منها.

٣ (٠) + ٢ (٠) <؟ ٦	٣ (٠) + ٢ (٠) >؟ ٦
صفر >؟ ٦	صفر <؟ ٦
الجواب لا	الجواب نعم

فالمتباينة: **٣ س + ٢ ص ≥ ٦**

(ii) الشكل



نجد أولاً معادلة الخط المستقيم المتقطع والذي لا يدخل بمنطقة الحل والمتباينة لا تشمل المساواة اطلاقاً.

والحل مباشرة:

ص = ٥ المعادلة ا لمرافقة

ويما أن نقطة ضمن منطقة الحل فإن ص < ٥ هي المتباينة المنشودة.

تحقق من نقطة الأصل.

٠ <؟ ٥

الجواب: نعم

∴ المتباينة **ص < ٥**

مثال (١٠):

مثّل منطقة الحل لنظام المتباينات التالية:

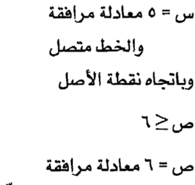
س ≤ صفر ، ص ≤ صفر ، س + ص ≤ ٢ ، س + ص ≥ ٨ ، س ≥ ٥ ،

ص ≥ ٦

بما أن س ≤ صفر ، ص ≤ صفر فإن منطقة الحل ستكون في الربع الأول فقط.

والآن نبدأ بتمثيل المتباينات على سطح بياني واحد هكذا:

س ≥ ٥



س = ٥ معادلة مرافقة

والخط متصل

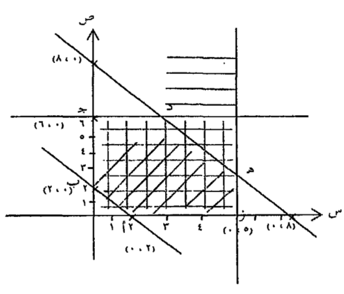
وباتجاه نقطة الأصل

ص ≥ ٦

ص = ٦ معادلة مرافقة

والخط متصل

وباتجاه نقطة الأصل



س + ص ≤ ٢

س + ص = ٢ معادلة مرافقة

٤

والخط متصل

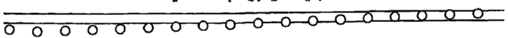
س	٠	٢
ص	٢	٠

تحقق نقطة الأصل

٠ + ٠ <؟ ٢

الجواب لا

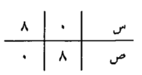
فمنطقة الحل لا تحوي نقطة الأصل



س + ص ≥ ٨

س + ص = ٨ المعادلة المرافقة

والخط متصل



س	٠	٨
ص	٨	٠

تحقق نقطة الأصل

٠ + ٠ ≥ ٨ ؟

الجواب نعم

فمنطقة الحل باتجاه نقطة الأصل، ومنطقة الحل للنظام بلا رتوش كما في الشكل أعلاه.

مثال (١١):

يبيع تاجر نوعين من المواد التموينية هما: السكر والأرز، ويكلفه الطن الواحد من السكر ٣٠٠٠ دينار، والطن من الأرز ٧٠٠٠ دينار، ويربح في طن السكر عند بيعه ٥٠٠ دينار، كما يربح في طن الأرز ببيعه ٤٥٠ دينار، فإذا كان الطلب المتوقع على المادتين معاً لا يزيد عن ٢٥٠٠ طناً في الشهر، ولا يريد هذا التاجر أن يستثمر أكثر من ٧٥٠٠٠٠ دينار في توفير هاتين المادتين في مخازنه، فكم طناً يجب أن يوفر من كل مادة شهرياً.

اكتب برنامجاً خطياً لهذه المسألة:

السكر الأرز (ص طن)

نرتب المعلومات المعطاة

الطلب المتوقع س + ص ≥ ٢٥٠٠ (١)

٣٠٠٠ س + ٧٠٠٠ ص ≥ ٧٥٠٠٠٠ (٢)

الاقتران الهدف ر = ٥٠٠ س + ٤٥٠ ص

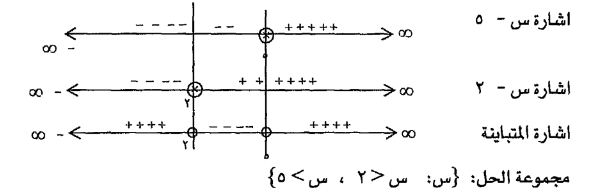
عدم السالبية: س ≥ صفر ، ص ≥ صفر

مثال (١٢):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة

س^{٢} – ٧ س + ١٠ > صفر بالتخيل

(س – ٥) (س – ٢) > صفر



مجموعة الحل: {س: س < ٢ ، س > ٥}

كفترات (– ∞ ، ٢) ∪ (٥ ، ∞) = ح – [٢ ، ٥]

وعلى خط الاعداد

∞ - ٢ ٥ ∞

مثال (١٣):

أوجد مجموعة حل المتباينة

٦ س – س^{٢} – ١٠ < صفر نرتب الطرف الأيمن حسب قوس س النازلة

– ٦ (– س^{٢} + ٦ س – ١٠ < صفر) نجعل س^{٢} موجب الاشارة

س^{٢} – ٦ س + ١٠ > صفر نعكس اشارة التباين < الى >

مميز الطرف الأيمن ب^{٢} – ٤ أ جـ = (– ٦)^{٢} – ٤ × ١ × ١٠

= ٣٦ – ٤٠ = – ٤

فاشارة المتباينة مثل اشارة $س^{2}$ موجبة

∴ مجموعة الحل= ح {س: س ∋ ح }

كفترة   س = (- ∞ ، ∞)

على خط الاعداد   - ∞ ←//////////////////→ ∞

مثال (١٤):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة   ٢ ≤ |س| ≤ ٥

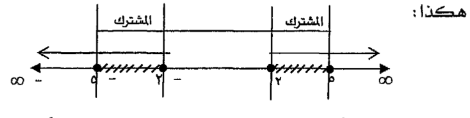
نجزئ هذه المتباينة هكذا:

٢ ≤ |س| ⓪و |س| ≤ ٥   وبعد فك رمز القيمة المطلقة

(٢ ≤ س ، س ≤ - ٢) و (- ٥ ≤ س ≤ ٥)

مجموعة الحل للمتباينة (٢ ≤ س ، س ≤ - ٢) ∩ (- ٥ ≤ س ≤ ٥)

هكذا:



مجموعة الحل= { س: - ٥ ≤ س ≤ - ٢ و ٢ ≤ س ≤ ٥ }

كفترات   [- ٥ ، - ٢] ∪ [٢ ، ٥]

وعلى خط الاعداد   - ∞ - ٥ - ٢ ٢ ٥ ∞

مثال (١٥):

حل المتباينة

$(٣س - ١)^{2} > (٢ - ٣س)^{2}$ بفك الأقواس

$$٩س^٢ - ٦س + ١ > ٤ - ١٢س + ٩س^٢$$

$$+١٢س \qquad\qquad +١٢س$$

$$٦س + ١ > ٤$$

$$-١ \qquad -١$$

$$\frac{٦}{٦}س > \frac{٣}{٦}$$

$$س > \frac{١}{٢}$$

مجموعة الحل = $\{س : س > \frac{١}{٢}\}$

كفترة س = $(\frac{١}{٢} ، \infty)$

على خط الاعداد ∞ ... $\frac{١}{٢}$ ... $-\infty$

مثال (١٦):

لينال طالب مجتهد تقدير ممتاز في مبحث الرياضيات، عليه أن يحصل على ما لايقل عن ٢٧٠ علامة في ثلاثة امتحانات تعقد لهذا المبحث، فإذا حصل الطالب على العلامتين ٩١ ، ٨٤ في الامتحانين الأول والثاني، ما هي العلامات التي يمكن أن يحصل عليها هذا الطالب في الامتحان الثالث؟

علامة الامتحان الأول ٩١

علامة الامتحان الثاني ٨٤

علامة الامتحان الثالث س

$\therefore ٨٤ + ٩١ + س \geq ٢٧٠$ ——— (١)

وبما أن العلامة الكاملة لكل امتحان هي ١٠٠

$\therefore س \leq ١٠٠$ ⟵ (٢)

∴ ٩١ + ٨٤ + س ≤ ٢٧٠

١٧٥ + س ≤ ٢٧٠

- ١٧٥   - ١٧٥

س ≤ ٩٥   (١)

من (١) ، (٢) تكون

٩٥ ≤ س ≤ ١٠٠

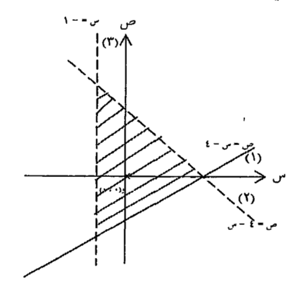
وعندما كانت العلامات أعداد صحيحة فهي:

س ∈ {٩٥، ٩٦، ٩٧، ٩٨، ٩٩، ١٠٠}

مثال (١٧):

اكتب المتباينات الى مجموعة حلها ممثلة بالمنطقة المظللة.

الملاحظ بالشكل أن المعادلات المرافقة هي:



(١) ص = س - ٤ والخط متصل

∴ هناك مساواة

نحقق نقطة الأصل في

الاختيار الأول ص ≤ س - ٤

٠ ≤ ٠ - ٤ ؟

الجواب نعم

∴ ص ≤ س - ٤   المتباينة الأولى

(٢) ص = ٤ – س والخط متقطع فلا مساواة بالمتباينة.

نحقق نقطة الأصل في:

الاختبار الأول: ص > ٤ – س

٠ $\overset{?}{<}$ ٤ - ٠

الجواب لا

الاختبار الثاني: ص < ٤ – س المتباينة الثانية

(٣) س = - ١ والخط متقطع فلا مساواة في المتباينة

وبما أن منطقة الحل على يمين الخط المتقطع فهو أكبر من - ١

أي أن س > – ١

فنظام المتباينات هو: ص ≤ س – ٤

ص < ٤ – س

س > - ١

مثال (١٨):

ينتج مصنع للأدوات الكهربائية ٩٩ تلفازاً اسبوعياً كحد أقصى، ومن نوعين هما ملون وغير ملون، ويحقق ربحاً مقداره ٢٥ دينار لكل تلفاز من النوع الملون و ١٣ دينار من النوع غير الملون، فإذا كان طلب السوق من تلفازات النوع الأول لا يقل عن ضعف الطلب من نوعه الثاني.

استخد الطريقة الجبرية (عمليات الصف البسيط لتحديد ما يجب انتاجه من كل نوع لتحقيق أكبر ربح ممكن. علماً بأن جميع ما ينتج من التلفازات يباع مباشرة!

	ملون (س)	غير ملون (ص)	الانتاج أو الطلب

نرتب المعلومات المعطاة س + ص ≤ ٩٩ (١)

س ≤ ٢ ص (٢)

الاقتران الهدف: ر = ٢٥ س + ١٣ ص

عدم السالبية:

س ≤ صفر
ص ≤ صفر

نبدأ:

باستحداث متغيرات وهمية جديدة لتحويل المتباينات والاقتران الهدف الى نظام من المعادلات الخطية باستثناء المتباينات المتعلقة بعدم السالبية (س ≤ صفر ، ص ≤ ٠) هكذا.

١ س + ١ ص + ل + (٠) ك + (٠) ح = ٩٩ (١)

١ س - ٢ ص + (٠) ل + ك + (٠) ح = صفر (٢)

- ٢٥ س - ١٣ ص + (٠) ل + (٠) ك + ح = صفر (٣)

ثم نقوم بترتيب المعاملات والثوابت كما هو مبين بالجدول:

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	الاجراءات
١	(١)	١	٠	٠	٩٩	
(١)	- ٢	٠	١	٠	٠	طرحا
- ٢٥	- ١٣	٠	٠	١	٠	

الآن نبحث عن الركيزة الأول وهي العامود س

١٠٠ ÷ ١ = ١٠٠

صفر ÷ ١ = صفر

∴ في الصف الثاني

فالركيزتان حولهما دوائر صغيرة في الجدول.

ونبدأ بالدوران حول الركائز بأن نجعل قيمة كل الركيزة ١ وباقي عناصر العامود أصفار استعانة بعمليات الصف البسيط كا يلي:

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
٠	(٣)	١	-١	٠	٩٩	
(١)	-٢	٠	١	٠	٠	× ٢٥ جمعا
-٢٥	-١٣	٠	٠	١	٠	

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
٠	(٣)	١	-١	٠	٩٩	× ٢١ جمعا
(١)	-٢	٠	١	٠	٠	
٠	-٦٣	٠	٢٥	١	٠	

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
٠	(٣)	١	-١	٠	٩٩	÷ ٣
(١)	-٢	٠	١	٠	٠	
٠	٠	٢١	٤	١		
					٢٠٧٩	

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت	
٠	(١)	١/٣	-١/٣	٠	٣٣	× ٢ جمعا
(١)	-٢	٠	١	٠	٠	
٠	٠	٢١	٤	١		
					٢٠٧٩	

س	ص	ل	ك	ح	الثوابت
٠	(١)	١/٣	-١/٣	٠	٣٣
(١)	٠	٢/٣	١/٣	٠	٦٦
٠	٠	٢١	٤	١	٢٠٧٩

∴ س = ٦٦ تلفزيوناً ملوناً

ص = ٣٣ تلفزيون غير ملون

نحقق الهدف:

ر = ٢٥ س + ١٣ ص

= ٢٥ (٦٦) + ١٣ (٣٣)

= ١٦٥٠ + ٤٢٩ = ٢٠٧٩

= ٢٠٧٩ دينار

مثال (١٩):

(i) أوجد مجموعة الحل للمتباينة

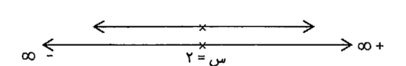
س ≶ ٢ (س ≤ ٢ أو س > ٢)

نجزئ المتباينة كما يلي:

(س < ٢) أو (س = ٢) أو (س > ٢)

أي أن (س < ٢) ∪ (س = ٢) ∪ (س > ٢)

وتوضح هكذا:



مجموعة الحل = ح

وكفترة (- ∞ ، ∞)

وعلى خط الاعداد: - ∞ ∞

(ii) أي الأزواج المرتبة الآتية يحقق المتباينة

٣ س - ٢ ص ≤ ١٢ ؟

أولاً: (٦ ، ٠) ⟵ ٣ (٦) - ٢ (٠) ≤ ١٢ ؟

⟵ ١٨ ≤ ١٢ ؟ الجواب لا

∴ (٦ ، ٠) لا يُحقق المتباينة.

ثانياً: (٤ ، ١) ⟵ ٣ (٤) - ٢ (١) ١٢

⟵ ١٢ - ٢ $\overset{?}{\geq}$ ١٢

⟵ ١٠ $\overset{?}{\geq}$ ١٢ الجواب نعم

∴ (٤ ، ١) يحقق المتباينة.

ثالثاً: (٢ ، - ٤) ⟵ ٣ (٢) - ٢ (- ٤) $\overset{?}{\geq}$ ١٢

⟵ ٦ + ٨ $\overset{?}{\geq}$ ١٢

⟵ ١٤ $\overset{?}{\geq}$ ١٢ الجواب لا

∴ (٢ ، - ٤) لا يحقق المتباينة.

رابعاً: (٠ ، ٠) ⟵ ٣ (٠) - ٢ (٠) $\overset{?}{\geq}$ ١٢

⟵ ٠ $\overset{?}{\geq}$ ١٢ الجواب نعم

∴ (٠ ، ٠) يحقق المتباينة.

مثال (٢٠):

أوجد مجموعة الحل للمتباينة $\sqrt{(\text{س} - ٢)} \leq ٢$

بما أن مجال الاقتران س - ٢ ≤ صفر ⟵ (١)

وكذلك $(\sqrt{(\text{س} - ٢)})^{٢} \leq (٢)^{٢}$

س - ٢ ≤ ٤ ⟵ (٢)

ومن (١) ، (٢) ٠ ≤ س - ٢ ≤ ٤

+٢ +٢ +٢

٢ ≤ س ≤ ٦

أي أن ٢ ≤ س ≤ ٦

مجموعة = { س: ٢ ≤ س ≤ ٦ }

وعلى خط الاعداد

- ∞ ٢ ٦ ∞

(٩- ٨) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) حل المتباينة $\frac{١}{س + ٣} > ٢$

$\{-٣ < س < -\frac{٥}{٢}\}$

(٢) حل نظام المتباينات التالي بيانياً على المستوى الديكارتي

$س + ص \leq ١$ ، $س - ص \leq ١$

(٣) حل المتباينة $\frac{س - ١}{س + ١} \geq ١$

(٤) حل المتباينة $\frac{١}{س + ١} > \frac{٣}{٢}$ $\{-١ ، -\frac{١}{٣}\}$

(٥) حل المتباينة صفر $\geq$ (س - ١) $(س + \frac{١}{٢})$

$\{(-\infty ، -\frac{١}{٢}] ، [١ ، \infty)\}$

(٦) أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات:

(١) $|س - ٢| < ١$ $\{١ ، ٣\}$

(٢) $|٢ س - ١| > \frac{٢}{٣}$ $\{(-\infty ، -\frac{١}{٦}) ، (\frac{١}{٢} ، \infty)\}$

(٧) حل المتباينة ٤ $س^٣$ - ٦ $س^٢ \geq$ صفر

$\{(-\infty ، \frac{٣}{٢}]\}$

(٨) حل المتباينة $-١ \leq ٢ س < ٤$

$\{[١ ، \frac{٧}{٢})\}$

(٩) اذا علمت أن $(\sqrt{٢})^٢ = ٢$

فأي من الجمل التالية هي الصواب؟

(i) $\sqrt{٢} = ١,٤١$

(ii) $\sqrt{٢} > ١,٤١$

(iii) $\sqrt{٢} < ١,٤١$

{ ارشاد: أوجد $(١,٤١)^٢$ أولاً ثم... }

(١٠) أوجد مجموعة الحل للمتباينات كلاً على انفراد:

(١) $\frac{٢}{٣ - س} \geq ٤$ { $[\frac{٥}{٢}$ ، $٣)$ }

(٢) $|٤ - ٦س| < \frac{١}{٢}$ { $(\frac{٧}{١٢}$ ، $\frac{٩}{١٢})$ } كفترة

(٣) صفر $< |س - ٣| < ٨$ { $(-٥$ ، $٣) \cup (٣$ ، $١١)$ }

{ارشاد: صفر $<$ س - ٣ $<$ ٨ (أو) - ٨ $<$ س - ٣ $<$ صفر}

(٤) $س^٢ - ١ <$ صفر { $(-١$ ، $١)$ } كفترة

(١١) حل المتباينات التالية:

(١) ٨س - $\frac{١}{س^٢}$ $<$ صفر ، س $\neq$ صفر

{ ارشاد: اجعل الطرف الأيمن اقتران نسبي واحد }

(٢) $\frac{(٢س + ١)(٤س^٢ + ٢س + ١)}{س^٢}$ $<$ صفر ، س $\neq$ صفر

{ $(\frac{١}{٢}$ ، $\infty)$ }

(٣) $\frac{٢ - س}{\sqrt{٩ - ٦س}}$ $<$ صفر

{ ارشاد: أوجد المجال أولاً } { $(-\infty$ ، $\frac{٣}{٢})$ }

(٤) |س + ١/٢| ≥ ٢ { [٣/٢ ، ٥/٢-] }

(٥) ١ ≥ |٢ س + ١| { (∞ ، ٠] ∪ (١- ، ∞-) }

(١٢) أي من الأزواج المرتبة التالية: (٤ ، ١)، (١ ، -٤) ، (١ ، -١) ، (٥ ، ٢)
يعتبر حلاً للمتباينة س – ص > ٣

{ (١ ، -١) }

(١٣) مثّل بيانياً مجموعة الحل للنظام من المتباينات التالية:

س – ص ≥ ٢

٣ س – ص ≥ ٦

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

(١٤) مزرعة مساحتها ١٥ دونماً، مزروعة بنوعين من المحاصيل أ ، ب ويعمل في المزرعة ٢٠ عاملاً، إذا علمت أن الطن الواحد من المحصول أ يحتاج الى أرض مساحتها دونم واحد، وعاملين اثنين، ويحقق ربحاً مقداره ٥٠ ديناراً. والطن الواحد من المحصول ب يحتاج الى ٣ دونمات من الأرض، وعاملين اثنين، ويحقق ربحاً مقداره ٥٥ ديناراً، كم طناً يجب أن تنتج المزرعة لتحقق أكبر ربح ممكن؟

{ هناك الطريقة الجبرية والطريقة الهندسية ولك الحرية في اختيار الطريقة التي تريد).

(١٥) أي من أنظمة المتباينات التالية:

س + ص ≤ ٢ ، س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

س – ص ≤ ٢ ، س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

س + ص ≥ ٢ ، س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

س – ص ≥ ٢ ، س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

مجموعة حله تُمثل بالمنطقة المظللة في الشكل المجاور؟

(١٦) اكتب البرنامج الخطي للمسألة التالية:

ينتج مصنع نوعين من السلع أ ، ب ويحتاج لانتاج الوحدة الواحدة من أ الى ساعتي عمل في القسم الأول، و ٤ ساعات عمل في القسم الثاني، ويحتاج لانتاج الوحدة الواحدة من النوع ب الى ٤ ساعات عمل في القسم الأول، وساعتي عمل في القسم الثاني، والحد الأقصى لعمل كل من القسمين هو ١٢ ساعة، إذا علمت أن ربح الوحدة الواحدة من النوع أ ثلاثة دنانير، ومن النوع بـ دينارين، كم وحدة يجب أن ينتج من كل سلعة من أ ، ب لتحقيق أكبر ربح ممكن؟

(١٧) أيّ من المتباينات التالية هي الصواب؟:

(١) - ٥ > - ٧ (٢) ٢ ≥ ٣ > - ٥

(٣) $\frac{١}{س}$ > س حيث س ∋ ح* (٤) ٢ < س < ٣ حيث س ∋ ح+

{ المتباينة الرابعة }

(١٨) حل المتباينة

- ٣ + ١٨ > ٢ س - ٤ > ٣ س - ١٨

{ ارشاد: اقسمها الى مركبتيها والمرتبطتان بالأداة (و)}

{ (- ∞ ، $\frac{٢٢}{٥}$) ∪ (١٤ ، ∞) }

(١٩) مثّل النظام التالي من المتباينات على المستوى الديكارتي:

٠ ≤ س ≤ ٥ ، ٠ ≤ ص ≤ ٤

(٢٠) صاحب معرض للسيارات سافر الى المانيا وبحوزته ٣٢٠ الف دينار لشراء سيارات صغيرة وحافلات ركاب كبيرة لمعرضه، إذا كان ثمن السيارة الصغيرة ٥ آلاف دينار، وثمن الحافلة الكبيرة ٨ آلاف دينار.

ما هو أكبر عدد من السيارات الصغيرة والحافلات الكبيرة يمكن شراءها بهذا المبلغ أو جزء منه؟ علماً بأنه بحاجة الى ٦ سيارات صغيرة على الأقل و ٧ حافلات كبيرة على الأقل.

(٢١) أوجد مجموعة الحل للمتباينات التالية:

(١) $\frac{١}{٣}$ س + ٣ > $\frac{٢}{٣}$ س + ١ ≥ $\frac{١}{٣}$ س + $\frac{٨}{٣}$ $\{\phi\}$

(٢) ٦ س − س^{٢} − ١٠ > صفر {ح}

(٢٢) أي من هذه العبارات صواب؟ وضّح بالأمثلة فقط:

(١) اذا كان س > ص فإن أ س > أ ص ، أ ∋ ح

(٢) اذا كان س > ص فإن أ س > أ ص ، أ ∋ ح$^{+}$

(٣) اذا كان س > ص فإن $\frac{١}{س}$ > $\frac{١}{ص}$ ، س ، ص ≠ صفر

(٢٣) حل المتباينة $\frac{١}{س}$ > س ، س ≠ صفر

{ (− ∞ ، − ١) ∪ (١ ، ∞) }

{ ارشاد: اجعل المتباينة في طرف واحد }

(٢٤) أي من الأزواج المرتبة الآتية يمثل حلاً للمتباينة ٢ س + ٣ ص ≥ ١٢

(٣ ، ٢) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٤)

(٢٥) اكتب المتباينة التي حلها الهندسي يمثل بالشكل المظلل التالي:

(−٢ ، ٣) د
أ (٠ ، ٣)
ب (٠ ، ٠)

{ ارشاد: أوجد معادلة الخط المستقيم، ٢ ص − ٣ س ≥ ٦ }

(٢٦) مثّل بيانياً نظام المتباينات التالي:

س + ص ≥ ٦ ، ٢ س + ص ≥ ١٠ ، ١٠ س + ١٦ ص ≥ ٨٠

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ وظلل منطقة الحل.

(٢٧) أوجد مجموعة الحل لكل من المتباينات:

(١) س^{٢} + ٤ س + ٥ < صفر

(٢) (س – ٤) (س^{٢} – ٦ س + ٩) ≤ صفر

(٣) س – ٣ س^{٢} ≤ س – ٣

{(– ∞ ، – ١] ∪ [١ ، ٣]}

(٢٨) تُقدّم شركة مبيعات أجهزة طبية عرضين للأجور لمندوبيها، هكذا، "وباعتبار عدد القطع التي يبيعها المندوب شهرياً س قطعة"

الأول: مُمثلاً بالاقتران ع$_{١}$ (س) = س^{٢} – ٢٠ س + ١٥٠ دينار شهرياً

الثاني: ع$_{٢}$ (س^{٢}) = ٧ س + ١٠٠ دينار شهرياً.

متى يكون العرض الأول أفضل من العرض الثاني؟

{ارشاد: عندما يكون ع$_{١}$ (س) < ع$_{٢}$ (س)}

(٢٩) أوجد مجموعة الحل للمتباينة (س – ٢) (س – س^{٣}) ≤ صفر

(٣٠) حل المتباينة $\frac{١}{س}$ > $\frac{١}{٥}$ { (٠ ، ٥) كفترة }

(٣١) أجب بكلمة واحدة من الكلمتين: "صائبة ، خاطئة":

(١) – ٢ < – ٤ العبارة........ (٤) – ٢ ≤ – ٤ العبارة........

(٢) – ٢ > – ٤ العبارة........ (٥) – ٢ ≥ – ٤ العبارة........

(٣) – ٢ ≠ – ٤ العبارة........ (٦) – ٢ ≥ – ٤ العبارة........

(٣٢) اكتب المتباينات الثلاث التي حلها يمثل بالمنطقة المظللة كما في الشكل

{ ارشاد: استعن بمعادلة الخط المستقيم }

ص
س
ب(–١ ، ٥)
أ(٤ ، ٠)
ج(–١ ، –٥)

(٣٣) حل المتباينة:

س^{٢} ≤ ٢٥   {(- ∞ ، - ٥] ∪ [٥ ، ∞)}

(٣٤) مثّل بيانياً نظام المتباينات التالي:

س^{٢} + ص^{٢} ≥ ٤ ، س + ص ≤ ٢ وظلل منطقة الحل

{ ارشاد: س^{٢} + ص^{٢} ≥ ٤ تمثل بيانياً سطح دائرة }

(٣٥) مثّل نظام المتباينات بيانياً وظلل منطقة الحل:

|س| ≤ ٢ ، |ص| ≤ ١

{ ارشاد: أعد تعريف المتباينات، - ٢ ≤ س ≤ ٢ ، - ١ ≤ ص ≤ ١ }

(٣٦) ما العدد الحقيقي الذي يوجد في مجموعة حل كل من المتباينات:

١ > ٢ س - ٣ > ٣ ، ١٩ > ٤ + ٣ س > ٥٥   { ϕ }

(٣٧) أكمل الفراغات أدناه:

اذا علمت أن:

(١) ٢ > ٥   فإن $\frac{١}{٢}$ ... $\frac{١}{٥}$

(٢) $\frac{٢}{٥}$ ≥ $\frac{٣}{٤}$ فإن $\frac{٥}{٢}$ ... $\frac{٤}{٣}$

(٣) ($\sqrt{٣}$ - ١) > (٢ - ١) فإن (١ - $\sqrt{٣}$) ... (١ - ٢)

علماً بأن $\sqrt{٣}$ = ١,٧ تقريباً

(٤) ١ > ٢   فإن (- ٣) (١) ... (- ٣) (٢)

(٥) - $\frac{١}{٣}$ > - $\frac{٣}{٤}$ فإن $\frac{١}{٣}$ ... $\frac{٣}{٤}$

(٣٨) عبّر عن المجموعات التالية على شكل فترات، ومثلها على خط الاعداد:

(١) ف١ = { س: س ∈ ح ، -٤ ≤ س < ٥ }

(٢) ف٢ = { س: س ∈ ح ، -٥ ≤ س }

(٣) ف٣ = { س: س ∈ ح ، س < ٥ }

(٤) ف١ = { س: س ∈ ح ، -٤ ≤ |س| ≤ ٩ }

{ ان تبسيط المجموعة هو: ٤ ≤ س أو س ≤ -٤ ، -٩ ≤ س ≤ ٩

والجواب: [-٩ ، -٤] ∪ [٤ ، ٩] }

(٣٩) حل المتباينات التالية ومثل منطقة حل كل منها على خط الاعداد:

(١) س - ٧ > ٥ ، (٢) -٣/٤ س ≥ -٧/٨

(٣) ٦ - ٧ س ≥ ٨ س - ٣ ، (٤) ٢ س + ٧ > ٩ - ٤ س

(٥) ٦,٢ + ٤,٢ س < ١١,١

(٤٠) اشترى تاجر عدداً من عُلب الحلوى (س علبة) بمبلغ ٢١٢ ديناراً، ويبيع العلبة الواحدة منها بمبلغ ٥ دنانير، ما أقل عدد من العلب يجب أن يبيعها حتى يكسب؟

{ ارشاد: المكسب = ثمن البيع – تكلفة الشراء ، ٥ س - ٢١٢ < صفر}

(٤١) أشر الى المتباينات الخطية فيما يلي:

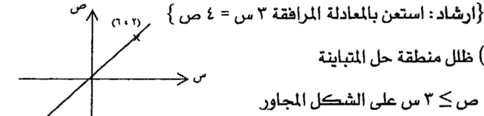
٣ س² + ص ≥ ٢ ، ص > س - ٣ ، س ص + ٥ ≤ ٢ س

٢ س – ص ≥ ١ ، √س + ١ > ٥ ، ٣ س + ١ < س – ٥

١/س - ١/ص < ٣

(٤٢) مثّل بيانياً منطقة الحل للمتباينة ٣ س ≤ ٤ ص

{ارشاد: استعن بالمعادلة المرافقة ٣ س = ٤ ص }



(٤٣) ظلل منطقة حل المتباينة

ص ≤ ٣ س على الشكل المجاور

(٤٤) اكتب المتباينة التي تمثل المنطقة المظللة

{ ارشاد: أوجد معادلة الخط المستقيم

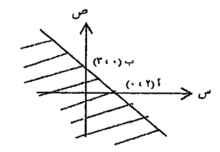
الواصل بين النقطتين }

(٤٥) أوجد القيمة العظمى للاقتران ق (س) = ٣ س + ص

في ظل القيود المروضة والممثلة بالمضلع المظلل في

{ ارشاد: تعويض نقط الاطراف في الاقتران مباشرة}

(٤٦) المنطقة المظللة تمثل حل المتباينة



(أ) ٢ س + ٣ ص ≤ ٦

أو (ب) ٣ س + ٢ ص ≤ ٦

أو (جـ) ٢ س + ٣ ص ≥ ٦

أو (د) ٣ س + ٢ ص ≥ ٦

(٤٧) ارسم منطقة حل نظام المتباينات وظللها:

س + ٢ ص ≤ ١٠ ، ٢ س + ص ≥ ٨ ، س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠

(٤٨) أي من النقط التالية (١ ، ٣) ، (- ١ ، ٢) ، (٠ ، ٠)

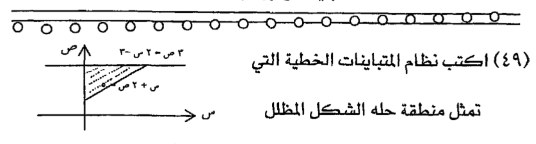
(٢ / - ١) ، (٤ ، ١) ، (٠ ، ٢)

يحقق النظام ٢ س – ٣ ص > صفر

٣ س + ٢ ص ≥ ٦

(٤٩) اكتب نظام المتباينات الخطية التي

تمثل منطقة حله الشكل المظلل



(٥٠) يُحضّر أخصائي تغذية وجبات خاصة مستخدماً نوعين من الأطعمة،

يحتوي الكيلوغرام من الأول: ٧٠٠ وحدة كالسيوم و٥٠٠ وحدة حديد و ٣٥٠ وحدة فيتامين ب

يحتوي الكيلوغرام من الثاني: ٣٥٠ وحدة كالسيوم و٣٥٠ وحدة حديد و ٧٠٠ وحدة فيتامين ب

فإذا كانت الحدود الدنيا لمحتويات هذه الوجبة:

٢٨٠ وحدة كالسيوم ١٦٠ وحدة حديد ١٨٠ وحدة فيتامين ب

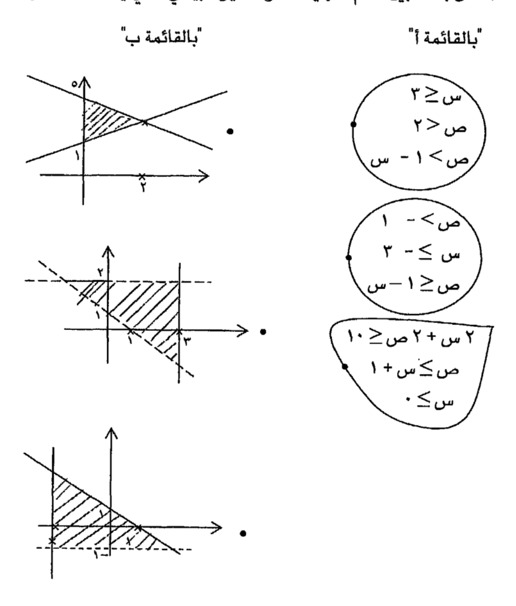
اكتب نظام المتباينات الخطية الذي يبين وزن كل من نوعي الأطعمة التي يمكن استخدامها في تحضير الوجبة الغذائية.

(٥١) يُريد رجل أن يستثمر من أمواله ما لا يزيد عن ٣٠٠٠٠ دينار في مشاريع ذات داخل مضمون وثابت، فنصحه خبير اقتصادي بشراء سندات تنمية حكومية بفائدة ٩٪ سنوياً وسندات اقراض لاحدى الشركات الصناعية بفائدة ١١٪ سنوياً. فقرر الرجل أن يستثمر ما لا يقل عن ٦٠٠٠ دينار في السندات الحكومية وأن لا يزيد المبلغ المستثمر في الشركات الصناعية عن مثلي المستثمر في السندات الحكومية. ما المبلغ الذي يُستثمر في كل من النوعين من السندات ويجعل العائد السنوي أكبر ما يمكن؟ اكتب البرنامج الخطي فقط.

{ر = ٠.٠٩ س + ٠.١١ ص}

(٥٢) تُنتج مطحنة نوعين من الدقيق، تربح بالطن الواحد من النوع الأول ٢٠ دينار، وتربح بالطن الواحد من النوع الثاني ٣٠ دينار، ويجب انتاج ما لا يقل عن ٦٠ طن من النوع الأول وما لا يزيد عن ١٠ أطنان من الثاني اسبوعياً. فإذا كان الحد الأدنى للانتاج الاسبوعي ١٠٠ طن، جد كمية الدقيق من كل من النوعين الواجب انتاجه اسبوعياً لتحقيق أكبر ربح ممكن بالطريقتين الهندسية والجبرية!.

(٥٣) صل بخط بين نظام المتباينات، والتمثيل البياني الذي يمثله "الشكل المظلل"



(٥٤) جد مجموعة الحل للنظام ٦ س – ص ≥ ١٦

س + ٥ ص ≥ ١٣

س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ بيانياً

(٥٥) ترغب احدى الجمعيات الخيرية توزيع نوعين من المعاطف الشتوية من ذات الحجمين الكبير والصغير على العائلات الفقيرة، فإذا كان سعر المعطف الكبير ٨ دنانير وسعر المعطف الصغير ٤ دنانير، وخصصت الجمعية المذكورة ٨٨ ديناراً لشراء المعاطف. اكتب المتباينة التي تبين عدد المعاطف الممكن شراءها من كلا الحجمين، ثم مثلها بيانياً.

{ ارشاد : ليس من الضروري الشراء بالمبلغ كاملاً مع أنه هو الأفضل }

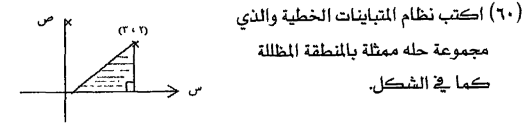
(٥٦) تنتج احدى الدول العربية ٦٠٠٠٠ طن من البترول يومياً، وتستخدم لتصديره نوعين من الناقلات، الأول يحمل ٢٠٠٠٠ طن في الرحلة الواحدة، والثاني يحمل ١٥٠٠٠ طن في الرحلة الواحدة، اذا استخدمت الدولة ٣ ناقلات من النوع الأول، ٤ ناقلات من النوع الثاني. علماً بأن ميناء التصدير لا يمكنه أن يشمل يومياً أكثر من ٥ ناقلات. جد عدد الناقلات من كل نوع الذي يمكن الدولة من تصدير بترولها بأقل عدد ممكن من الناقلات.

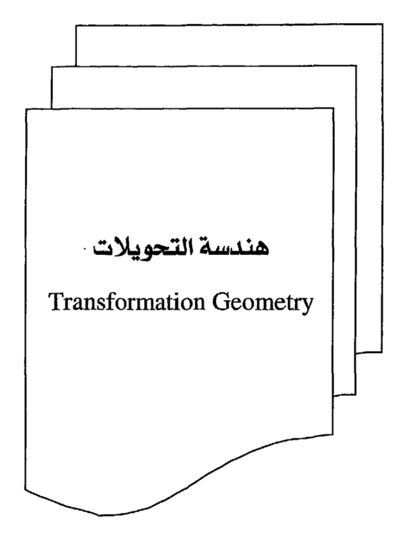
(٥٧) أوجد مجموعة الحل للنظام س ≥ ٦ ، ص ≥ ٥ ، س + ص ≤ ٢ ، س ≤ ٠ ، ص ≤ ٠ هندسياً وأوجد أكبر قيمة للاقتران ق = ٢ س + ٣ ص

(٥٨) أوجد مجموعة الحل للمتباينة - ٥ س < - ١٠

(٥٩) ما قيمة أكبر عدد صحيح للمتغير س بحيث أن ٥ س – ١ < ٢٨ { ٥ }

(٦٠) اكتب نظام المتباينات الخطية والذي مجموعة حله ممثلة بالمنطقة المظللة كما في الشكل.




هندسة التحويلات
Transformation Geometry

(١- ١) التساويات القياسية[*] Isomemtries

هندسة التحويلات فرعٌ من فروع الهندسة، وهذا الفرع يبحث في دراسة الأشكال الهندسية بأسلوب يسمى التساويات القياسية، والتحويل الهندسي بلغة الاقترانات؛ هو اقتران تناظر من المستوى الى نفسه يرسم كل نقطة من نقط المستوى فوق نقطة أخرى من نقط نفس المستوى.

فإذا كانت ي مجموعة جميع النقط في المستوى س فإن التحويل الهندسي هو اقتران تناظر من ي الى ي.

بحيث أن كل نقطة ن ∋ ي تُرسم فوق نقطة واحدة



نَ ∋ ي أيضاً:

أي أن نَ = ر (ن)

حيث نَ هي صورة ن بواسطة اقتران التناظر "ر"

ومن المعلوم أن الصورة يجب أن تكون وحيدة.

واقتران التناظر ر يجعل الشكلين الهندسيين متطابقين، اذا وجد تساوي قياسي يرسم أحدهما فوق الآخر.

وفي هذا الفصل سنناقش التساويات القياسية المستوية التالية:

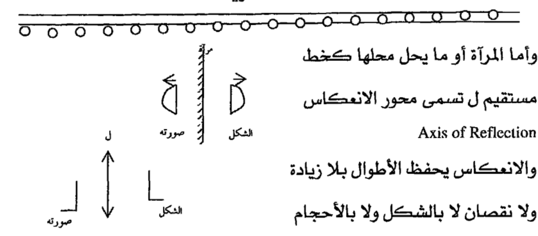
(١ - ٢) الانعكاس Reflection:

الانعكاس تحويل هندسي انبثقت فكرته من ملاحظتنا لما نشاهده من صورٍ لأجسامنا عندما نقف أمام المرآة، أو أي سطحٍ لامع لتحسين هندامنا.

سُمي الانعكاس باسمه هذا لأنه تحويل هندسي يُكوّن صوراً لأشكال معكوسة جانبياً كما في الشكل.

---

[*] هدا لا يمنع من وجود تحويلات هندسية غير قياسية كالتمدد (التكبير أو النصعير)



وأما المرآة أو ما يحل محلها كخط مستقيم ل تسمى محور الانعكاس Axis of Reflection

والانعكاس يحفظ الأطوال بلا زيادة ولا نقصان لا بالشكل ولا بالأحجام عند ايجاد صوراً لها، ولكنه يقلبها جانبياً كما في الشكلين أعلاه.

ويكون بعد الصورة عن محور الانعكاس يساوي بعد الشكل عن المحور نفسه.

ويمكن استخدام المحورين الاحداثيين كمحاور للانعكاس كما يلي:

الانعكاس في محور السينات:

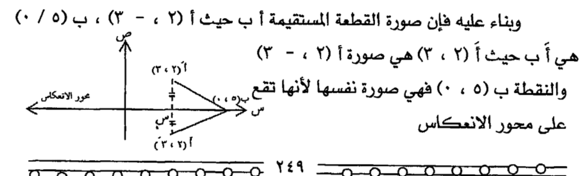
بما أن بعد الصورة عن المحور تساوي بعد الشكل (نقطة أو قطعة مستقيمة أو شكل هندسي) عن المحور، فإن:

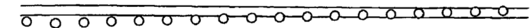
ص
أ (٣ ، ٢)
محور الانعكاس
س
$س_1$
أَ (٣ ، ٢̄)

لإيجاد صورة أَ بالانعكاس في محور السينات، ننزل العامود أ $س_1$ على محور السينات ونجده على استقامته بقدر نفسه ليصبح أ $س_1$ أَ ولتصبح أَ (٣ ، ٢̄) صورة أ (٣ ، ٢)

أي أن صورة أ (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي أَ (س ، ص) أي بتغيير اشارة المسقط الثاني (الصادي) فقط.

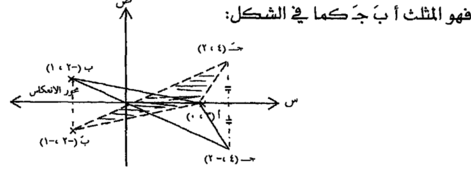
وبناء عليه فإن صورة القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٢ ، - ٣) ، ب (٥ / ٠) هي أَ ب حيث أَ (٢ ، ٣) هي صورة أ (٢ ، - ٣) والنقطة ب (٥ ، ٠) فهي صورة نفسها لأنها تقع على محور الانعكاس





وأما صورة المثلث أ ب جـ حيث أ (٣ ، ٠) ، ب (- ٢ ، ١) ، جـ (٤ ، - ٢)

فهو المثلث أ بَ جَ كما في الشكل:



وإذا كان محور الانعكاس هو محور الصادات، فإن اشارة المسقط الأول (السيني) هي التي تتغير كما يلي:

فإن صورة أ (٣ ، ٢)؛

ننزل العامود الأفقي أ ص١

ونمده على استقامته الى أَ (- ٣ ، ٢)

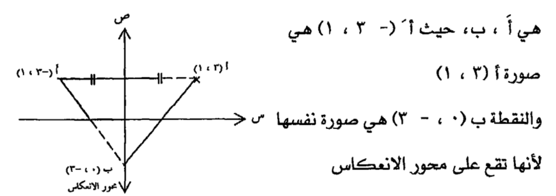
وكذلك صورة القطعة المستقيمة أ ب حيث أ (٣ ، ١) ، ب (٠ ، - ٣) ،

هي أَ ، ب، حيث أَ (- ٣ ، ١) هي

صورة أ (٣ ، ١)

والنقطة ب (٠ ، - ٣) هي صورة نفسها

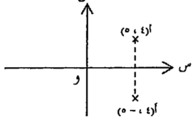
لأنها تقع على محور الانعكاس



وبشكل عام يمكن أن نلخص الانعكاسات كتحويل هندسي بواسطة المحورين كما يلي:

أولاً: ان صورة أ (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي أَ (س ، - ص) تغيير اشارة المسقط الصادي مع الحفاظ على قيمته المطلقة.

مثل أن صورة أ (٤ ، ٥) بالانعكاس في محور السينات هي أ (٤ ، - ٥) كما في الشكل.

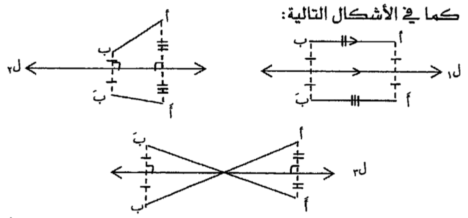


ثانياً: ان صورة أ (س ، ص) بالانعكاس في محور الصادات هي أَ (- س ،ص) "تغيير اشارة المسقط السيني مع الحفاظ على قيمته المطلقة.

مثل أن صورة أ (٤ ، ٥) بالانعكاس في محور الصادات هي أَ (- ٤ ، ٥) كما في الشكل.

وهكذا فإن الانعكاس كتحويل هندسي وواحد من التساويات القياسية يحقق العديد من الخواص والصفات نبرزها كما يلي:

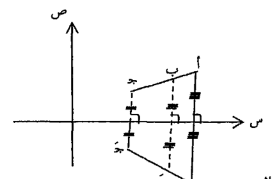
(i) **الانعكاس يحفظ أطوال القطع المستقيمة:** أي أن الانعكاس يرسم أي قطعة مستقيمة (كمجموعة من النقط) فوق قطعة مستقيمة أخرى تطابقها كما في الأشكال التالية:



فإذا كانت القطعة المستقيمة أ ب // ل١ ⟵ فإن أَ بَ // ل١ أيضاً

ومنها أ ب // أَ بَ

(ii) **الانعكاس يحفظ البينية** Betweenes:



والتفسير: اذا كانت النقطة ب

تقع بين النقطتين أ ، جـ فإن

صورتها بَ تقع بين صورتي

النقطتين أَ ، جَ (صورتي أ ، جـ)

بالانعكاس على نفس محور الأشكال

وليكن محور السينات، كما في الشكل

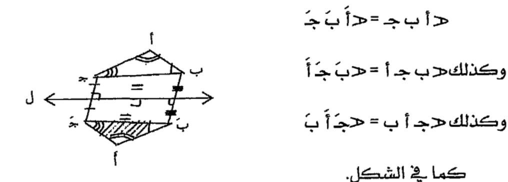
ويُعبّر عن ذلك رياضياً.

إذا كانت ن (أ ، ب ، جـ) ــفإن⟵ نَ (أَ ، بَ ، جَ)

فإذا كانت النقط أ ، ب ، جـ على استقامة واحدة، فإن المصور أَ ، بَ ، جَ تقع على استقامة واحدة ايضاً. كما في الشكل أيضاً.

(iii) **الانعكس يحفظ مقياس الزوايا** Angles Mearure:

في المثلثين أ ب جـ ، أَ بَ جَ المتطابقين حيث أَ صورة أ ، بَ صورة ب ، جَ صورة جـ فإن الانعكاس عامود الانعكاس (ل) يبقي قياسات الزوايا كما يلي:



∢أ ب جـ = ∢أَ بَ جَ

وكذلك∢ب جـ أ = ∢بَ جَ أَ

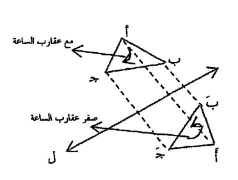
وكذلك∢جـ أ ب = ∢جَ أَ بَ

كما في الشكل.

(iv) الانعكاس يعكس الاتجاه الدوراني Reverses Orientation:

ان الشكل المجاور يوضح انعكاس المثلث أ ب جـ بالانعكاس في العامود ل

من الملاحظ أن الاتجاه الدوراني



حول رؤوس المثلث أ ب جـ هو

اتجاه مع عقارب الساعة.

وأما الاتجاه الدوراني حول

صورته بالانعكاس في المحور ل

أَ بَ جَ فهو ضد عقارب الساعة

لذلك يسمى الانعكاس تساوي

قياس عكسي Reverser Isometric وهذا ما يسمى بشكل عام بالانقلاب الجانبي.

(v) الانعكاس يحفظ التوازي Parallelism:

اذا كانت القطعة المستقيمة أ ب // محور الانعكاس ل فإن صورتها أَ بَ // المحور ل كما في الشكل:

وبالتالي فإن أ ب // أَ بَ

مثال:

أوجد احداثيات صورة كل نقطة من النقط الآتية بالانعكاس:

(i) بالنسبة لمحور السينات

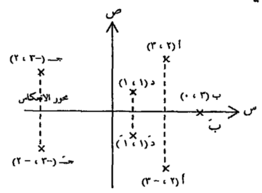
(ii) بالنسبة لمحور الصادات

(iii) بالنسبة للمستقيم ص = ص

أ (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، صفر) ، جـ (- ٣ ، ٢) ، د (١ ، ١)

أولاً: بالنسبة لمحور السينات:

مع ملاحظة أن صورة ب (٣ ، ٠) هي نفسها ب (٣ ، ٠) كونها على محور الانعكاس (محور السينات)

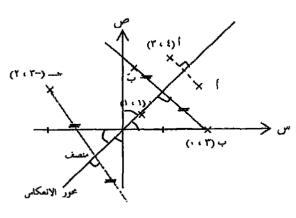


ثانياً: بالنسبة لمحور الصادات

ثالثاً: بالنسبة للمستقيم ص = س

اما احداثيات أَ ، بَ ، جَ ، فتعين بالرسم الدقيق ولا علاقة لها بالانعكاس بالمحور السيني أو الصادي اطلاقاً.

مع ملاحظة أن صورة د هي نفسها د كونها واقعة على محور الانعكاس ص = س



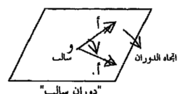
(١٠ - ٣) الدوران Rotation:

تحويل ل هندسي وتساوي قياس ناتج عن دوران شعاع.. أو شكل هندسي في مستوى حول نقطة ثابتة في المستوى نفسه تسمى مركز الدوران وبزاوية معلومة تسمى زاوية الدوران كما في الشكل.

"دوران موجب"

ليكن و أ شعاع في المستوى س فإذا دار هذا الشعاع باتجاه معاكس لدوران عقارب الساعة حول النقطة و فإنه يأخذ الوضع و أَ وهذا دوران موجب مركزه النقطة و وبزاوية مقدارها هـ° (مقياس الزاوية موجب).

وأما الدوران السالب فهو الحاصل من دوران و أ حول أ النقطة و وباتجاه دوران عقارب الساعة،



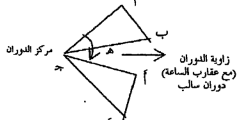
"دوران سالب"

ومركزه النقطة و وبزاوية هـ°

(مقياس الزاوية سالب)

ومن الملاحظ أن النقطة الوحيدة التي ترسم فوق نفسها هي مركز الدوران "و"

والمثلث يمكن أن يدور حول أحد رؤوسه كمركز للدوران كما في الشكل.



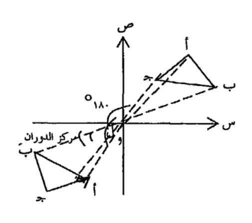
والدوران يمكن أن يكون باتجاه دوران عقارب الساعة أي دوران سالب أو صفر دوران عقارب الساعة أي دوران موجب.

وهناك **الدوران المحايد** Identity Rotetion:

عندما يدور الشكل ٣٦٠° حذف أو دورة كاملة ليعود وينطبق على نفسه وكأنه ما دار اطلاقاً.

والدوران يمكن أن يوضح باستخدام الاحداثيات الديكارتية في المستوى الديكارتي كما يلي:

أي شكل هندسي كالمثلث مثلاً يمكن أن يدور دورة كاملة أو جزءاً منها حول نقطة الأصل كما في الشكل.



اذا دار المثلث أ ب جـ نصف دورة حول النقطة و (مركز الدوران) فإن صورته تصبح أَ بَ جَ

حيث أ $\xrightarrow[\text{١٨٠°}]{\text{دوران}}$ أَ

ب $\xrightarrow[\text{١٨٠°}]{\text{دوران}}$ بَ

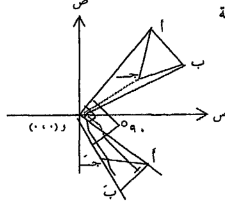
جـ $\xrightarrow[\text{١٨٠°}]{\text{دوران}}$ جَ

وبعدها أ ب جـ $\xrightarrow[\text{١٨٠°}]{\text{دوران}}$ أَ بَ جَ مع عقارب الساعة أو عكسها سيّان.

فمركز الدوران نقطة الأصل و (٠ و ٠)

وزاويته ١٨٠° والدوران موجب أو سالب "الوضع نفسه".

ويمكن أن يدور المثلث أ ب جـ ربع دورة (٩٠°) حول نقطة الأصل كما في الشكل.



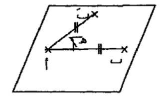
الدوران سالب حيث أنه مع عقارب الساعة

مركزه نقطة الأصل و (٠ ، ٠)

وزاويته ٩٠° ربع دورة.

والآن سنناقش خصائص الدوران كتحويل هندسي قياسي:

(i) الدوران يحفظ الأطوال:



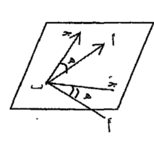
فإذا دارت القطعة المستقيمة أ ب
حول النقطة أ كما في الشكل
بزاوية مقياسها هـ فإن صورتها
تصبح أ بَ

ومن البداهة بمكان أن نلاحظ أن أ ب = أ بَ

القطعتان المستقيمتان أ ب ، أ بَ متساويتان في الطول.

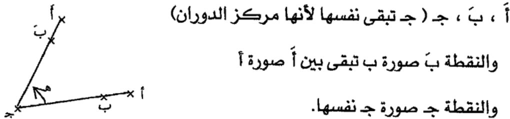
أو أ ب

(ii) الدوران يحفظ مقاييس واتجاه الزوايا (سالب أو موجب):



إذا دارت الزاوية "كما في الشكل"
حول الرأس ب فإن مقياس الزاوية
أ ب جـ = مقياس الزاوية أَ ب جـَ = هـ°
سواء أكان الدوران مع أو ضد عقارب
الساعة.

(iii) الدوران يحفظ الاستقامة السينية: فإذا كانت النقطة ب محصورة بين النقطتين أ ، جـ كما في الشكل أ ب جـ ودارت القطعة المستقيمة أ جـ في المستوى س حول النقطة جـ بزاوية هـ ضد عقارب الساعة تصبح صورتها بالدوران أَ ، بَ ، جـ (جـ تبقى نفسها لأنها مركز الدوران)



والنقطة بَ صورة ب تبقى بين أَ صورة أ
والنقطة جـ صورة جـ نفسها.

(iv) الدوران يحفظ التوازي:

اذا كانت القطعة المستقيمة أ ب

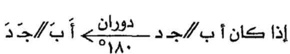
توازي القطعة المستقية جـ د

ودارت كل منها نصف دورة حول

نقطة الأصل و (٠ ، ٠) كما في

الشكل فإن أَ بَ // جَ دَ كما في

الشكل. أي أن:



إذا كان أ ب // جـ د $\xrightarrow[\text{١٨٠°}]{\text{دوران}}$ أَ بَ // جَ دَ

الدوران سالب حيث أنه مع عقارب الساعة

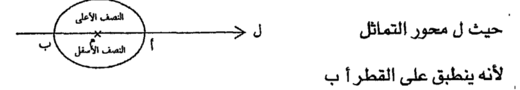
وزاويته ∠هـ = ١٨٠° (نصف دورة)

وكتطبيق على الانعكاس والدوران سنناقش **التماثل** Symmetry:

مبدئياً يقال للشكل أنه متماثل إذا أمكن طيه حول مستقيم بحيث يتطابق نصف الشكل حول هذا المستقيم، عندها يسمى المستقيم:

محور التماثل Axis of Symmetry:

كالدائرة المتماثلة حول أي خط مستقيم ينطبق على أي قطرٍ منها كما في الشكل:



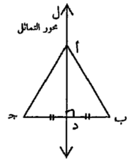
حيث ل محور التماثل

لأنه ينطبق على القطر أ ب

مما يجعل نصف الدائرة الأعلى يطابق نصف الدائرة الأسفل.

فالانعكاس الذي يجعل الشكل منطبقاً على نفسه يسمى تماثلاً لهذا الشكل.

فالمثلث المتساوي الساقين متماثل حول المستقيم المار بالعامود المنصف النازل من رأسه على قاعدته، كما في الشكل.



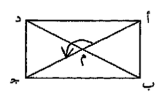
كون التماثل يتولد عن الانعكاس، ولأن

المثلث أ ب جـ $\xrightarrow[\text{محور الانعكاس}]{\overleftrightarrow{ل}}$ Δ أ جـ ب

أي المثلث وصورته بالانعكاس ينطبقان على بعضهما البعض.

فالمثلث أ ب جـ متماثل حول المحور ل المار بالعامود المنصف للقاعدة (أ د)

وهكذا يكون التماثل حول مستقيم (محور تماثل) وقد يكون التماثل حول نقطة (مركز التماثل) كون التماثل يتولد عن الدوران حول نقطة كما في الشكل.



عندما يدور المستطيل أ ب جـ د ١٨٠° حول النقطة م (مركز الدوران) ينطبق على نفسه لذا تصبح النقطة م (مركز التماثل) أي أن

▭ أ ب جـ د $\xrightarrow[\text{حول م}]{١٨٠°}$ ▭ جـ د أ ب وهو نفسه المستطيل.

أي ينطبق المستطيل على نفسه.

مع تغيير في رؤوسه.

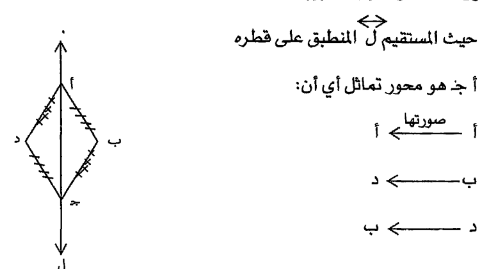
حيث أ $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ جـ

ب $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ د

جـ $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ أ

د $\xrightarrow{\text{تصبح بعد الدوران}}$ ب

فالتماثل رياضياً لمجموعة من النقط هو أي تساوي قياسي يرسم هذه النقط فوق نفسها (وليس بالضرورة كل نقطة فوق نفسها). كما في الشكل.



حيث المستقيم ل المنطبق على قطره

أ جـ هو محور تماثل أي أن:

أ ⟵(صورتها) أ

ب ⟵ د

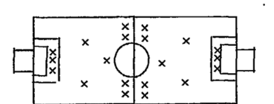
د ⟵ ب

جـ ⟵ جـ

وهكذا لبقية النقط.

وبالتالي أ ب جـ د ⟵(صورته) أ د جـ ب

والتماثل ظاهرة تتصف بالانتظام، ومنتشرة بكثرة في الحياة اليومية بشكل يجلب الانتباه، إذ أنه من الممكن الحصول على هذا التماثل البسيط اذا ما نظرنا الى ملعب كرة القدم قبل بداية المباراة لمشاهدة ترتيب اللاعبين على نصفي الملعب يشكل تماثل كما في الشكل.



علماً بأن كل فريق

١١ لاعب موزعين

كما في الشكل.

والملاحظ أن هناك أشكالاً هندسية منتظمة غير متماثلة حول محور مثل متوازي الأضلاع أ ب جـ د الذي لا يمكن طيه حول مستقيم ليصبح نصفه الأول منطبقاً على نصفه الثاني.

وكذلك الشكل الرباعي أ ب جـ د شكل هندسي غير منتظم وليس له محور تماثل.

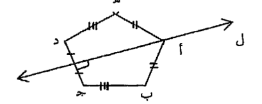
وكذلك المثلث المنفرج الزاوية أ ب جـ وغيرها من الأشكال.

مثال:

ارسم محور التماثل (إن وجد) للشكل الخماسي المنتظم (المخمس $\overleftrightarrow{ل}$ محور التماثل والذي يمر بأحد رؤوسه مثل أ

وعامودي على الضلع المقابل

د جـ كما في الشكل.



مثال:

حدد هندسياً تماثلات الدائرة.

للدائرة محاور تماثل لا نهائية حيث أن كل مستقيم ينطبق على أي قطر فيها هو محور تماثل لها.

وعلى سبيل المثال المحاور: $ل_١$ ، $ل_٢$ ، $ل_٣$ ، ...

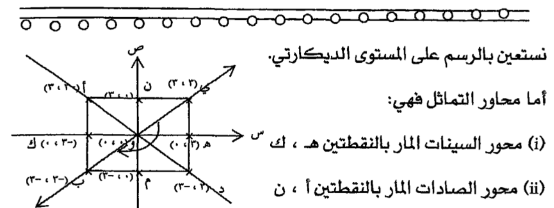
وعلى المستوى الديكارتي يمكن بيان محور تماثل أو محاور تماثل الأشكال الهندسية المنتظمة المتماثلة كالمربع والمستطيل والدائرة والمثلث المتساوي الساقين والمثلث المتطابق الأضلاع ... هكذا.

إذا كانت النقط أ (- ٣ ، ٣)

ب (- ٣ ، ٢)

جـ (٣ ، - ٣)

د (٣ ، - ٣) رؤوس مربع، جد أربعة تماثلات لهذا المربع



نستعين بالرسم على المستوى الديكارتي.

أما محاور التماثل فهي:

(i) محور السينات المار بالنقطتين هـ ، ك

(ii) محور الصادات المار بالنقطتين أ ، ن

(iii) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{د ب}}$ المنطبق على (القطر) $\overline{\text{د ب}}$

(iv) المستقيم $\overleftrightarrow{\text{جـ ب}}$ المنطبق على القطر أ جـ

وجميع هذه المحاور تمر بنقطة الأصل.

مع ملاحظة أن المربع أ ب جـ د يمكن أن يدور نصف دورة حول نقطة الأصل لتكون نقطة الأصل هي مركز لدوران التماثل مع أو ضد عقارب الساعة.

لينطبق المربع على نفسه بتغيير رؤوسه فقط هكذا:

أ ——دوران ١٨٠°——> جـ

ب ————> د

جـ ————> أ

د ————> ب

ليصبح المربع أ ب جـ د ——١٨٠° دوران——> المربع نفسه ولكن باسم جـ د أ ب .

"وهذا يؤكد أن التماثل ناتج عن انعكاس بمحور انعكاس وعند دوران بمركز دوران وزاوية دوران".

× **الانسحاب** Translation:

تحويل هندسي وتساوي قياسي ناتج عن حركة الشكل الهندسي بشروط معينة، كون الشكل الهندسي اذا ما سُحب باتجاه محدد فإن صورته تبقى مطابقة

تماماً له كما في الشكل.

فإذا سُحب المثلث أ ب جـ باتجاه

اليمين (اتجاه السهم)

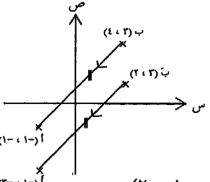
فإن المثلث أَ بَ جَـ يطابق المثلث

الأصلي.

وهكذا فإن الانسحاب ينقل جميع نقط (الشكل) للمسافة نفسها أي أن المسافات بين أ ، أَ وبين ب ، بَ وبين جـ ، جَـ متساوية تماماً. وفي نفس الاتجاه (هنا اتجاه السهم أو اليمين).

وأما الانسحاب على المستوى الديكارتي يتوضح بالتالي:

اذا كانت أ (- ١ ، - ١) ، ب (٣ ، ٤) بين تأثير الانسحاب بمقدار وحدتين للأسفل.



أ (- ١ ، - ١) ⟵ (وحدتين للأسفل) أَ (- ١ ، - ١ - ٢)

⟵ أَ (- ١ ، - ٣)

ب (٣ ، ٤) ⟵ (وحدتين للأسفل) بَ (٣ - ٢ ، ٤ - ٢)

⟵ بَ (١ ، ٢)

وكأن الانسحاب للأسفل يؤثر على الاحداثي الصادي فقط بالنقصان

وأما الانسحاب للأعلى فيؤثر على الاحداثي الصادي فقط بالزيادة.

والانسحاب لليمين يؤثر على الاحداثي السيني فقط بالزيادة

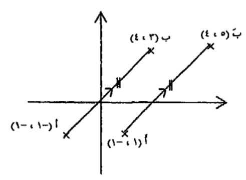
والانسحاب لليسار يؤثر على الاحداثي السيني فقط بالنقصان

فإذا كانت أ (- ١ ، - ١) ، ب (٣ ، ٤) بين تأثير الانسحاب لليمين بمقدار وحدتين

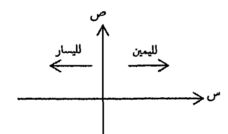
أ (- ١ ، - ١) $\xleftarrow[\text{لليمين}]{\text{وحدتين}}$ أَ (- ١ + ٢ ، - ١) ← أَ (١ ، - ١)

وكذلك ب (٣ ، ٤) $\xleftarrow[\text{لليمين}]{\text{وحدتين}}$ بَ (٣ + ٢ ، ٤) ← بَ (٥ ، ٤)

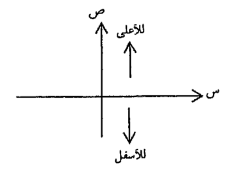
كما في الشكل.



وبشكل عام الانسحاب لليمين واليسار هكذا:



والانسحاب للأعلى والأسفل هكذا:



ويشكل عام:

الانسحاب لليسار يتم بالنقصان، وباليمين يتم بالزيادة

وللأسفل يتم بالنقصان، وللأعلى يتم بالزيادة

أي لليسار وللأسفل ⟵ نقصان، لليمين والأعلى ⟵ زيادة

مثال:

إذا كانت صورة أ (س ، ص) ⟵ أَ (س + ٣ ، ص - ١) فجد صور رؤوس المثلث د هـ و حيث

د = (٢ ، - ١)

هـ = (١ ، ١)

و = (٤ ، ٤)

تحت تأثير الانسحاب نفسه.

أولاً: نُفسر العبارة أ (س ، ص) ⟵ أَ (س + ٣ ، ص - ١)

الاحداثي السني (س) يصبح (س + ٣) أي انسحاب لليمين ٣ وحدات. أي أن جميع النقاط د ، هـ ، و تنسحب لليمين ٣ وحدات.

والاحداثي الصادي ص يصبح ص - ١ أي انسحاب للأسفل ١ وحدة. وجميع النقط تنسحب للأسفل بوحدة واحدة هكذا:

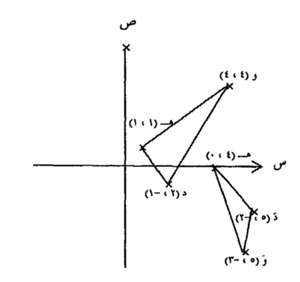
أ (س ، ص) ⟵ أَ (س + ٣ ، ص - ١)

د (٢ ، - ١) ⟵ دَ (٢ + ٣ ، - ١ - ١) ⟵ دَ (٥ ، - ٢)

هـ (١ ، ١) ⟵ هـَ (١ + ٣ ، ١ - ١) ⟵ هـَ (٤ ، صفر)

و (٤ ، ٤) ⟵ وَ (٤ + ١) ١ - ٤) ⟵ وَ (٥ ، - ٣)

والشكل التالي يوضح الانسحاب:



ومن خصائص الانسحاب:

(i) الانسحاب يحفظ القيمة:

ويعبر عن ذلك باختصار شديد:

ن (أ ، ب ، جـ) ⟵ نَ (أَ ، بَ ، جَ)

أي أن النقطة ب تقع بين أ ، جـ

وكذلك صورتها بَ تقع بين أَ ، جَ

انسحاب

(ii) الانسحاب يحفظ الأطوال والاستقامة:

ويعبر عن ذلك باختصار شديد:

بما أن أ ب جـ قطعة مستقيمة فإن أَ بَ جَ قطعة مستقيمة أيضاً.

وأن طول أ ب = طول أَ بَ

وكذلك طول ب جـ = طول بَ جَ

(iii) الانسحاب يحفظ التوازي:

ان انسحاب شبه المنحرف

باتجاه السهم يبقي أَ بَ // دَ جَ

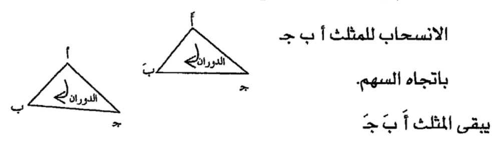
كون أ ب // جـ د

(iv) الانسحاب يحفظ الاتجاه الدوان:

الانسحاب للمثلث أ ب جـ

باتجاه السهم.

يبقى المثلث أَ بَ جَ



بنفس الاتجاه الدوران، إذ يسمى أ ب جـ باتجاه دوران عقارب الساعة.

وكذلك أَ بَ جَ يسمى باتجاه دوران عقارب الساعة كما هو واضح في الشكل. ∴

وأخيراً سنوجز صفات مجموعات التساويات القياسية Group of Isometries كما يلي:

التساويات القياسيات كتحويلات هندسية مستوية تحفظ:

الأطوال والمساحات والحجوم للأشكال الهندسية.

وتضم الانعكاس والدوران والانسحاب. وهي نوعان هما:

الأول: تساويات قياسية مباشرة Direct Isometries:

وهي التي تحفظ الاتجاه الدوراني مثل الدوران والانسحاب.

الثاني: تساويات قياسية عكسية Opposite Isometries:

وهي التي تعكس الاتجاه الدوراني أي تقلب الشكل جانبياً مثل الانعكاس.

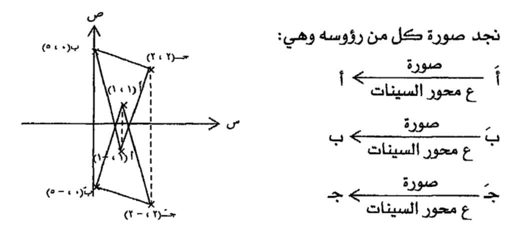
(١٠- ٥) أمثلة محلولة على المتباينات والبرمجة الخطية

مثال (١):

جد صورة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (١ ، - ١) ، ب (٠ ، ٥) ، جـ (٢ ، ٢) بالانعكاس في محور السينات.

الحل:

نجد صورة كل من رؤوسه وهي:

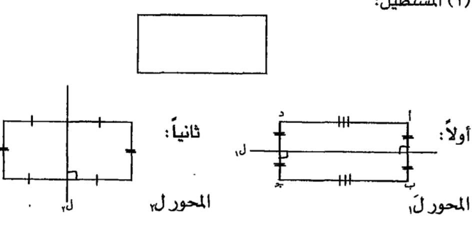


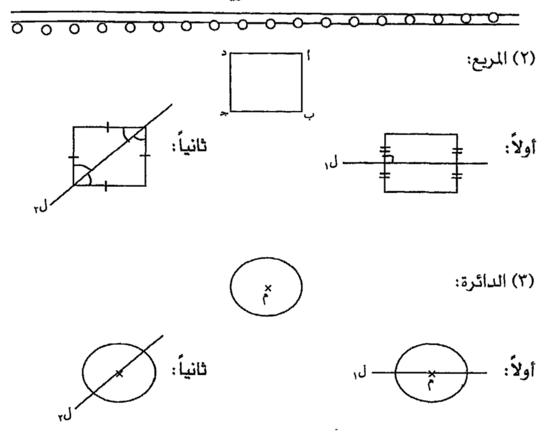
∴ أَ بَ جـَ هي صورة المثلث أ ب جـ بالانعكاس في محور السينات.

مثال (٢):

حدد محورين فقط تتماثل كل من الأشكال التالية (إن وجدت).

(١) المستطيل:





ملحوظة:

للدائرة محاور تماثل غير نهائية، حيث كل قطرٍ فيها هو محور متماثل لها.

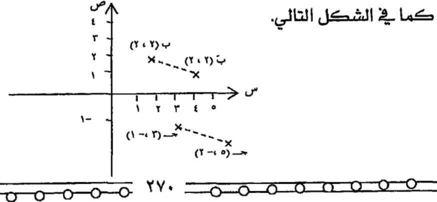
مثال (٣):

اذا كانت صورة النقطة أ (س ، ص) هي النقطة أَ (س + ٢ ، ص - ١) جد صور النقط ب (٢ ، ٢) ، جـ (٣ ، - ١) تحت تأثير الانسحاب نفسه.

ب (٢ ، ٢) ⟵صورتها⟵ ب (٢ + ٢ ، ٢ - ١) = بَ (٤ ، ١)

والنقطة جـ (٣ - ١) ⟵صورتها⟵ جَ (٣ + ٢ ، - ١ - ١) = جـ (٥ ، - ٢)

كما في الشكل التالي.



مثال (٤):

اذا كانت صورة أ (س ، ص) ⟵ أَ (س + ٣ ، ص - ١)

فجد صور رؤوس المثلث د هـ و حيث د (٢ ، - ١) ، هـ (١ ، ١) ، و (٤ ، ٤) تحت تأثير نفس الانسحاب، قارن بين أطوال أضلاع المثلثين د هـ و ، دَ هـَ وَ المتناظرة.

د (٢ ، - ١) ⟵صورتها دَ (٢ + ٣ ، - ١ - ١) = دَ (٥ ، - ٢)

هـ (١ ، ١) ⟵صورتها هـَ (١ + ٣ ، ١ - ١) = هـَ (٤ ، ٠)

و (٤ ، ٤) ⟵صورتها وَ (٤ + ٣) ٤ - ١) = وَ (٧ ، ٣)

د هـ = $\sqrt{(٢ - ١)^٢ + (- ١ - ١)^٢}$

= $\sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

هـ و = $\sqrt{(١ - ٤)^٢ + (١ - ٤)^٢}$

= $\sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

د و = $\sqrt{(٢ - ٤)^٢ + (- ١ - ٤)^٢}$

= $\sqrt{٤ + ٢٥} = \sqrt{٢٩}$

دَ هـَ = $\sqrt{(٥ - ٤)^٢ + (- ٢ - ٠)^٢}$

= $\sqrt{١ + ٤} = \sqrt{٥}$

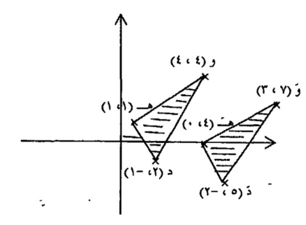
هـَ وَ = $\sqrt{(٤ - ٧)^٢ + (٠ - ٣)^٢}$

= $\sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨}$

دَ وَ = $\sqrt{(٥ - ٧)^٢ + (- ٢ - ٣)^٢}$

= $\sqrt{٤ + ٢٥} = \sqrt{٢٩}$

كما في الشكل التالي:

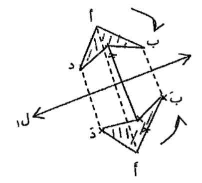


نستنج أن أطوال أضلاع المثلثين المتناظرة متساوية، وهذا يبين أن الانسحاب تحويل هندسي يحفظ الأطوال، لذا فهو تحويل هندسي قياسي أو تساوي قياسي.

مثال (٥):

حدد صورة الشكل أ ب جـ د التالي بالانعكاس بمحور الانتكاس ل١

ويلاحظ أن أ َب َ جـَ د َ مقلوب جانبياً بالنسبة للشكل أ ب جـ د حيث يقرأ باتجاه عكس عقارب الساعة بينما أ ب جـ د يقرأ مع اتجاه عقارب الساعة.



مثال (٦):

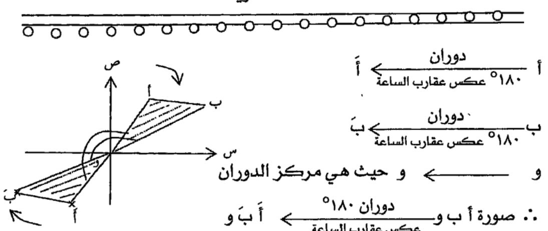
حدد صورة النقطة أ (٤ ، ٥) على المستوى الديكارتي بدوران مقياسه (مقداره) 90° حول نقطة الأصل وباتجاه عقارب الساعة.

أ (٤ ، ٥) ←(دوران 90° مع عقارب الساعة)← أَ (- ٥ ، ٤)

ص
أ (٤ ، ٥)
مع عقارب الساعة
س
و (مركز الدوران)
أ (-٥ ، ٤)

مثال (٧):

اذا كان أ ب جـ مثلث فحدد صورته على المستوى الديكارتي بدوران وقياسه 180° حول نقطة الأصل، وبعكس اتجاه عقارب الساعة.



أ $\xrightarrow[\text{١٨٠° عكس عقارب الساعة}]{\text{دوران}}$ أَ

ب $\xrightarrow[\text{١٨٠° عكس عقارب الساعة}]{\text{دوران}}$ بَ

و ⟵ و حيث هي مركز الدوران

∴ صورة أ ب و $\xrightarrow[\text{عكس عقارب الساعة}]{\text{دوران ١٨٠°}}$ أَ بَ و

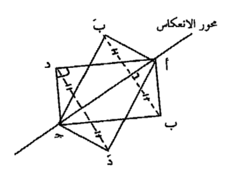
كما في الشكل

من الملاحظ أن الدوران لا يقلب الاتجاه.

فالمثلث أ ب و يُقرأ مع عقارب الساعة، وكذلك أَ بَ و يقرأ مع عقارب الساعة أيضاً.

مثال (٨):

حدد صورة المستطيل أ ب جـ د بواسطة الانعكاس حول قطره أ جـ.



الحل:

أ $\xrightarrow{\text{صورتها}}$ أ (لأنها واقعة على محور الانعكاس)

ب ⟵ بَ

جـ ⟵ جـ (لأنها واقعة على محور الانعكاس)

د ⟵ دَ

∴ صورة أ ب جـ د $\xrightarrow[\text{حول محور الانعكاس المار بالقطر أ جـ}]{\text{الانعكاس}}$ أ بَ جـ دَ "كما في الشكل"

مثال (٩):

أوجد صورة النقطة أ (٧ ، ٢) تحت تأثير الانسحاب ح١ باتجاه اليمين ويمقدار ٣ وحدات، ثم تحت تأثير الانسحاب ح٢ باتجاه الأسفل وبمقدار ٤ وحدات.

أ (٧ ، ٢) ←(ح١ لليمين (٣))— أً (٧ + ٣ ، ٢) = أً (١٠ ، ٢)

حيث الاحداثي الصادي لا يتأثر

أً (١٠ ، ٢) ←(ح١ للأسفل)—

أً (١٠ ، ٢) ←(ح١ للأسفل (٤))— أً (١٠ ، ٢ - ٤) = أً (١٠ ، - ٢)

حيث الاحداثي السيني لا يتأثر

وكأن أ (٧ ، ٢) ←—— أً (١٠ ، - ٢) بانسحاب مقداره أ أً والذي يمكن ايجاد مقداره من نظرية فيتاغورس كما يلي:

أ أً = $\sqrt{(٣)^٢ + (٤)^٢}$ كون أ أَ أً قائم الزاوية

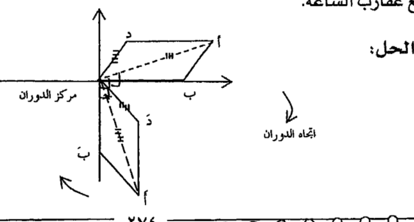
= $\sqrt{٢٥}$ = ٥ وحدات

وباتجاه أ أً كما في الشكل.

مثال (١٠):

أوجد صورة متوازي الأضلاع أ ب جـ د بدوران حول الرأس جـ وبزاوية ٩٠° مع عقارب الساعة.

الحل:



أ $\xrightarrow[\text{حول جـ ٩٠°}]{\text{دوران}}$ أَ

ب $\xrightarrow[\text{حول جـ ٩٠°}]{\text{دوران}}$ بَ

جـ ⟵ جـ لأنها مركز الدوران

د $\xrightarrow[\text{حول جـ ٩٠°}]{\text{دوران}}$ دَ

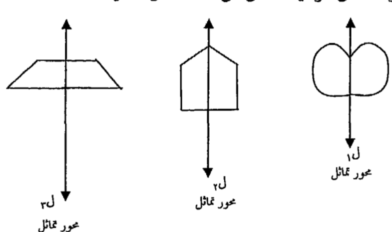
∴ أ ب جـ د $\xrightarrow{\text{صورته}}$ أَ بَ ج دَ

ويقرأ باتجاه عقارب الساعة أي كما يُقرأ أ ب جـ د

فالدوران لا يعكس الاتجاه.

مثال (١١):

ارسم محور التماثل الوحيد لكل من الأشكال التالية:

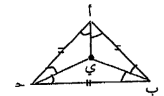


مثال (١٢):

حدد مركز دوران المثلث المتطابق الأضلاع وزاوية الدوران ليصبح مركز تماثل للمثلث.

الحل:

مركز الدوران أو مركز تماثل المثلث المتطابق الأضلاع هو نقطة التقاء مستقيماته المتوسطة أو منصفات زوايا كونها هي نفسها. كما في الشكل.



وهو النقطة ي

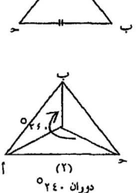
والدوران وبأي اتجاه (مع أو ضد عقارب الساعة) وبزوايا قياسها:

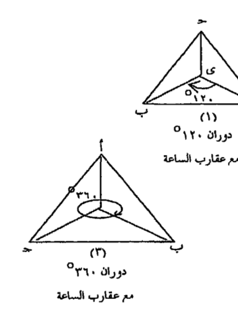
(i) $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$

(ii) $120^\circ + 120^\circ = 240^\circ$

(iii) $120^\circ + 120^\circ + 120^\circ = 360^\circ$

كما في الأشكال التالية:





ب
٢٤٠°
أ
جـ
(٢)
دوران ٢٤٠°
مع عقارب الساعة

ويمكن ايجاز الدورانات كما يلي:

(١) أ ب جـ ←(دوران ١٢٠° مع عقارب الساعة)— جـ أ ب وهو نفسه أ ب جـ (تماثل)

(٢) أ ب جـ ←(دوران ٢٤٠° مع عقارب الساعة)— ب جـ أ وهو نفسه أ ب جـ (تماثل)

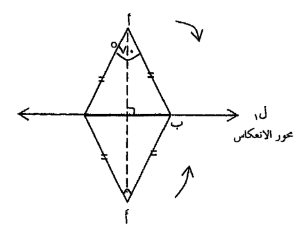
(٣) أ ب جـ ←(دوران ٣٦٠° مع عقارب الساعة)— أ ب جـ (تماثل)

أي للمثلث المتطبق الأضلاع ثلاثة تماثلات: بالدوران حول نقطة التقاء المستقيمات المتوسطة فيه أو حول نقطة التقاء منصفات زواياه.

مثال (١٣):

أ ب جـ مثلث متساوي الساقين، فيه أ ب = أ جـ وقياس الزاوية حـأ = ٧٠°

أوجد صورته بالانعكاس بمحور مار بقاعدته ب جـ.



أ ⟵(انعكاس عامود / ب جـ) أَ

ب ⟵(انعكاس عامود / ب جـ) ب لأنها واقعة على محور الانعكاس

جـ ⟵(انعكاس عامود / ب جـ) جـ لأنها واقعة على محور الانعكاس

∴ أ ب جـ ⟵(انعكاس عامود / ب جـ) أَ ب جـ

من الملاحظ أن أ ب جـ يُقرأ مع عقارب الساعة

أما صورته أَ ب جـ فتقرأ ضد عقارب الساعة

من هنا نقول الانعكاس يقلب الشكل جانبياً.

مثال (١٤):

أجب بنعم أو بلا فقط:

(i) الانعكاس يحفظ ترتيب النقط (البينية) ⟵ الجواب نعم

(ii) كل تحويل هندسي يكون تساوياً قياسياً ⟵ الجواب لا

(iii) المربع له محور تماثل واحد فقط ⟵ الجواب لا

(iv) الدوران يحفظ مقاييس الزوايا ⟵ الجواب نعم

مثال (١٥):

أوجد معادلة صورة المستقيم س + ص = ٣ بالانعكاس حول محور السينات.

نجد نقطتين على المستقيم وصورة كل منهما بالانعكاس حول محور السينات هكذا:

أولاً: أفضل نقطة هي:

أين يقطع المستقيم س + ص = ٣ محور السينات.

نضع ص = صفر

س = ٣

∴ (٣ ، ٠) تقع على المستقيم وعلى صورته كونهما على محور الانعكاس.

نجد نقطة أخرى على المستقيم س = ١

∴ ١ + ص = ٣

ص = ٢

∴ ب (١ ، ٢) تقع على المستقيم

نجد صورة ب (١ ، ٢) $\xleftarrow[\text{حول محور السينات}]{\text{الانعكاس}}$ بَ (١ ، - ٢)

ولإيجاد معادلة صورة المستقيم المار بالنقطة أ (٣ ، ٠) ، بَ (١ ، - ٢)

$$\text{م} = \frac{\text{ص}_{٢} - \text{ص}_{١}}{\text{س}_{٢} + \text{س}_{١}} = \frac{- ٢ - ٠}{١ - ٣} = \frac{- ٢}{- ٢} = ١$$

ص − ص$_1$ = م (س − س$_1$)

لنأخذ النقطة أ (٣ ، ٠)

ص − ٠ = ١ (س - ٣)

∴ ص = س - ٣ هي معادلة صورة المستقيم ص = - س + ٣ كما في الشكل.

مثال (١٦):

اذا كان أ ب جـ مثلث رؤوسه أ(١ ، ١) ، ب (٣ ، ٤) ، جـ (٥ ، - ١) حدد صورته على المستوى الديكارتي بالانسحاب ح (س ، ص) ⟵ (٢ س ، ٢ ص) ثم استنتج أن المثلث وسورته متشابهان.

أ (١ ، ١) ⟵ أَ (٢ ، ٢)

ب (٣ ، ٤) ⟵ بَ (٦ ، ٨)

جـ (٥ ، - ١) ⟵ جَ (١٠ ، - ٢)

نجد النسب بين أضلاع المثلث وصورته المتناظرة كما يلي:

$$\frac{أَ بَ}{أ ب} = \frac{\sqrt{(٦ - ٢)^٢ + (٨ - ٢)^٢}}{\sqrt{(٣ - ١)^٢ + (٤ - ١)^٢}} = \frac{\sqrt{١٦ + ٣٦}}{\sqrt{٤ + ٩}} = \frac{\sqrt{٥٢}}{\sqrt{١٣}}$$

$$= \sqrt{\frac{٥٢}{١٣}} = \sqrt{٤} = \frac{٢}{١}$$

وكذلك
$$\frac{بَ جَ}{ب جـ} = \frac{\sqrt{(٦ - ١٠)^٢ + (٨ - ٢)^٢}}{\sqrt{(٣ - ٥)^٢ + (٤ +١)^٢}} = \frac{\sqrt{١٦ + ١٠٠}}{\sqrt{٤ + ٢٥}} = \frac{\sqrt{١٦}}{\sqrt{٢٩}}$$

$$= \sqrt{\frac{١١٦}{٢٩}} = \sqrt{٤} = \frac{٢}{١}$$

وكذلك $\frac{جَ أَ}{جـ أ} = \frac{\sqrt{(١٠ - ٢)^٢ + (- ٢ - ٢)^٢}}{\sqrt{(٥ - ١)^٢ + (- ١ - ١)^٢}} = \frac{\sqrt{٦٤ + ١٦}}{\sqrt{١٦ + ٤}}$

$$= \frac{\sqrt{٨٠}}{\sqrt{٢٠}} = \sqrt{٤} = \frac{٢}{١}$$

بما أن أضلاع أ ب جـ ، أَ بَ جَ المتناظرة متناسبة

∴ أ ب جـ يشابه أَ بَ جَ

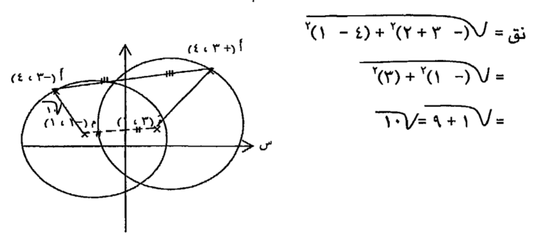
مثال (١٧):

ارسم الدائرة التي مركزها م (- ٢ ، ١) وتر بالنقطة أ (- ٣ ، ٤) ثم حدد صورتها بالانعكاس بمحور الصادات، وثم أوجد معادلة صورتها بعد الانعكاس.

نق = $\sqrt{(- ٣ + ٢)^٢ + (٤ - ١)^٢}$

= $\sqrt{(- ١)^٢ + (٣)^٢}$

= $\sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$



لإيجاد صورتها بالانعكاس بمحور الصادات نجد صورة مركزها م (- ٢ ، ١) والنقطة التي تمر بها أ (- ٣ ، ٤) حول محور الصادات هكذا :

م (- ١ ، ١) $\xrightarrow[\text{الصادات}]{\text{انعكاس حول محور}}$ مَ (٢ ، ١) (حيث الاحداثي الصادي لا يتأثر)

أ (- ٤ ، ٤) $\xrightarrow[\text{الصادات}]{\text{انعكاس حول محور}}$ أَ (٣ ، ٤) (حيث الاحداثي الصادي لا يتأثر)

معادلة صورة الدائرة:

نق = $\sqrt{(٣ - ٢)^٢ + (٤ - ١)^٢} = \sqrt{١ + ٩} = \sqrt{١٠}$ لا يتأثر بالانعكاس

المعادلة: $(س - ٢)^٢ + (ص - ١)^٢ = (\sqrt{١٠})^٢$

$س^٢ - ٤ س + ٤ + ص^٢ - ٢ ص + ١ = ١٠$

$س^٢ + ص^٢ - ٤ س - ٢ ص - ٥$ = صفر معادلة صورة الدائرة

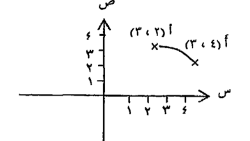
مثال (١٨):

صف الانسحابات التي أثرت على النقطة التالية حيث:

أ (٢ ، ٣) $\xrightarrow{\text{انسحاب}}$ أَ (٤ ، ٣) واكتب قاعدته.

على شكل قاعدة

التمثيل بالرسم أولاً.



بما أن أ (٢ ، ٣) $\xrightarrow{\text{انسحاب}}$ أَ (٤ ، ٣)

والملاحظ أن الاحداثي الصادي لم يتأثر

وانما الاحداثي السيني ازداد بمقدار ٢ وحدة

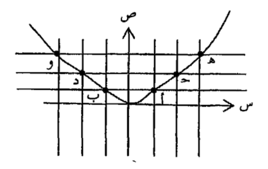
فهو انسحاب لليمين بوحدتين.

أي أن أ (٢ ، ٣) $\xrightarrow[\text{لليمين بوحدتين}]{\text{انسحاب}}$ أَ (٢ + ٢ ، ٣)

وقاعدته:

أ (س ، ص) $\longrightarrow$ أَ (س + ٢ ، ص)

مثال (١٩):



اعتمد على الشكل المجاور وأجب عما يلي: ما تأثير الانعكاس في محور الصادات على النقط التالية؟:

أ $\xleftarrow[\text{محور الصادات}]{\text{انعكاس}}$ الجواب (ب)

ب $\xleftarrow[\text{محور الصادات}]{\text{انعكاس}}$ الجواب (أ)

وكذلك جـ ⟵ د

د ⟵ جـ وهكذا...

مثال (٢٠):

حدد محاور التماثل للشكل السداسي المنتظم (المُسدس).

أولاً: $ل_١$

محور التماثل المار بقطره أ د

حيث الانتكاس حوله كما يلي:

أ ⟵ أ

ب ⟵ و

جـ ⟵ هـ

د ⟵ د

هـ ⟵ جـ

أي أ ب جـ د هـ و $\xleftarrow[\text{أ د}]{\text{محور التماثل}}$ أ و هـ د جـ ب = المسدس نفسه

وكذلك $ل_٢$

المار بقطره ب هـ

وكذلك $ل_٣$

المار بقطره جـ و

(١٠- ٦) أسئلة وتدريبات وتمارين تتطلب حلولاً من الدارسين والدارسات

(١) أجب عما يلي بشيء من الاختصار مع التوضيح بالرسم أو بالتمثيل البياني:

(١) ما عدد محاور تماثل المثلث المتساوي الساقين؟ {١}

(٢) ما عدد محاور تماثل الشكل السداسي المنتظم؟ { ٦ }

(٣) ما عدد محاور تماثل المثلث المتطابق الأضلاع؟ { ٣ }

(٤) ما صورة النقطة (٢ ، - ٥) بالانعكاس في نقطة الأصل؟ {(- ٢ ، ٥)}

(٥) ما صورة النقطة (٢ ، - ٥) بالانعكاس في محور السينات ثم في محور الصادات على التتالي؟ { (- ٢ ، ٥) }

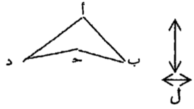
(٦) ما صورة النقطة (٣ ، ٠) بالانعكاس في محور السينات؟{(٣ ، ٠) نفسها}

(٧) ما قياس زاوية الدوران المحايد؟ {± ٣٦٠°}

(٨) ما صورة النقطة (- ٢ ، ٥) بالانسحاب الذي قاعدته:

(س ، ص) ⟵ (س + ١ ، ص - ٢) { (- ١ ،٣) }

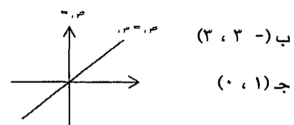
(٢) ارسم صورة المضلع أ ب جـ د بالانعكاس في المحور ل كما في الشكل:



(٣) عيّن صور كل من النقط أ (٣ ، ٥)

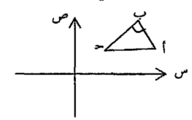
ب (- ٣ ، ٣)

جـ (١ ، ٠)



بالانعكاس في المحور ص = س كما في الشكل.

(٤) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، أوجد صورته بدوران مقياسه - ٩٠° حول نقطة حول نقطة الأصل وعلى المستوى الديكارتي كما في الشكل.



(٥) ما احداثيات صور كل من النقط:

(٣ ، - ٢) ، (- ٢ ، ٣) ، (٠ ، ٢) ، (٢√ ، ٣√)

بدوران مقياسه نصف دورة حول نقطة الأصل وعلى المستوى الديكارتي.

(٦) ما احداثيات صور كل من النقط (٣ ، ٢) ، (- ٣ ، ٢) ، (- ٣ ، - ٢) بالانسحاب الذي قاعدته (س ، ص) ⟵ (س + ١ ، ص + ٢) على المستوى الديكارتي.

(٧) اذا كانت النقطة هـَ صورة النقطة هـ (- ١ ، ٢) وكانت مَ صورة النقطة م(٣ ، ١) بالانعكاس في محور الصادات، احسب طول القطعة المستقيمة هـَ مَ وكذلك هـ م.

{ ١٧√ ، ١٧√ }

(٨) بيّن أن مُنصّف الزاوية هو محور تماثل لها.

{ ارشاد : استعمل تطابق المثلثات }

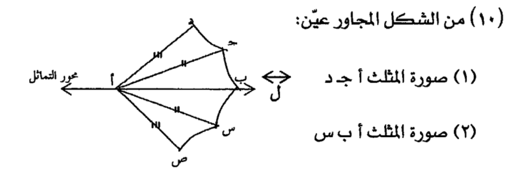
(٩) اذا كانت النقط أ (٠ ، ٠) ، ب (٣ ، ٠) ، جـ (٣ ، ٢) ، د (٠ ، ٢) هي رؤوس مستطيل، ما احداثيات رؤوسه بالانسحاب بمقدار ٥ وحدات للأسفل، وما مساحة المستطيل أَ بَ جَ دَ والمستطيل أ ب جـ د حيث أَ صورة أ ، بَ صورة ب ، جَ صورة جـ ، دَ صورة د.

{ ٦ ، ٦ }

(١٠) من الشكل المجاور عيّن:

(١) صورة المثلث أ جـ د

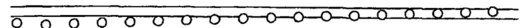
(٢) صورة المثلث أ ب س



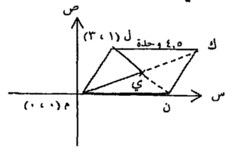
{المثلث أ س ص . المثلث أ ب جـ}

(١١) إذا كان ق (س) = |س| ، استعن بالرسم لكتابة قاعدة ق (س) بانسحاب مقداره وحدتين للأعلى، واكتب قاعدته أيضاً بانسحاب مقداره وحدتين للأسفل.

{ ق (س) = |س| + ٢ ، ق (س) = |س| - ٢ }



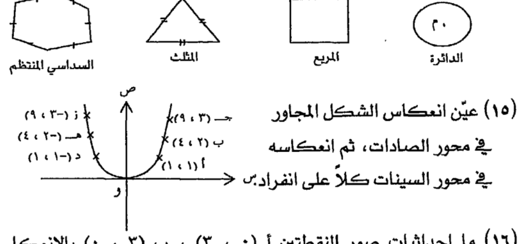
(١٢) اعتمد على الشكل الذي يمثل متوازي الأضلاع م ن ك ل لإيجاد احداثي الرأس ك ونقطة تقاطع قطريه ي.



{ ارشاد : جد احداثيات النقطة ن ، ك بالانسحاب }

(١٣) عيّن صورة المثلث أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٣ ، ٢) ، ب (٤ ، ١) ، و (٠ ، ٠) بالانعكاس في محور الصادات، وما نوع كل من المثلثين أ ب و ، أَ بَ وَ من حيث الأضلاع.

(١٤) حدد محوراً واحداً فقط لتماثل كل من الأشكال الهندسية التالية:



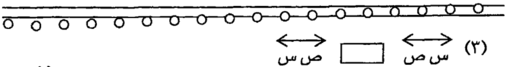
(١٥) عيّن انعكاس الشكل المجاور في محور الصادات، ثم انعكاسه في محور السينات كلاً على انفراد.

(١٦) ما احداثيات صور النقطتين أ (٠ ، ٣) ، ب (٣ ، ٠) بالانعكاس في المستقيم ص = - س.

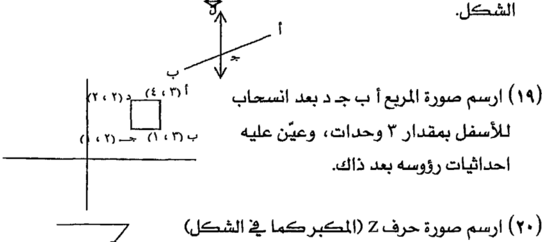
(١٧) ضع في المستطيل أدناه أحد الرمزين = ، ≠

(١) $\overline{\text{س ص}}$ ☐ $\overline{\text{ص س}}$

(٢) $\overleftarrow{\text{س ص}}$ ☐ $\overleftarrow{\text{ص س}}$



(١٨) ارسم صورة القطعة المستقيمة $\overline{\text{أ ب}}$ بالانعكاس حول المحور $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ كما في الشكل.



(١٩) ارسم صورة المربع أ ب جـ د بعد انسحاب للأسفل بمقدار ٣ وحدات، وعيّن عليه احداثيات رؤوسه بعد ذاك.

(٢٠) ارسم صورة حرف Z (المكبر كما في الشكل) بعد دورانه بزاوية قياسها °٩٠ حول النقطة أ وباتجاه عكس عقارب الساعة.

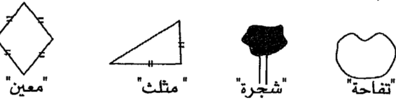
(٢١) اذا كانت النقط أ (٢١ ، ١٢) ، ب (١٢ ١٢) ، جـ (١٢ ، ٠) ، د (٠ ، ١٦) بيّن أن المثلثين أ ب جـ ، جـ و د متشابهان، حيث و نقطة الأصل.

(٢٢) اذا كانت النقطتان أ (٢ ، ٦) ، ب (٤ ، ٥) وكانت أ_1 ، ب_1 هما صورتهما بالانعكاس حول محور السينات، وكانت أ_2 ، ب_2 هما صورتهما (أي أ ، ب) بالانعكاس حول محور الصادات.

أوجد معادلتي المستقيمين $\overleftrightarrow{\text{أ}_1 \text{ب}_1}$ ، $\overleftrightarrow{\text{أ}_2 \text{ب}_2}$

ثم بيّن أنهما متوازيان.

(٢٣) ارسم محوراً لتماثل كل من الأشكال التالية إن وجد:



"تفاحة" "شجرة" " مثلث" "معين"

(٢٤) أوجد صورة النقطة (٢ ، - ٣) بالانعكاس حول المحور س + ص = صفر

(٢٥) أوجد احداثيات صورة النقطة أ (٣ ، ١) بالانعكاس حول المحور س = ١ ثم أوجد احداثياتها بالانعكاس حول المحور ص = ١ "كلاً على انفراد".

(١) أ . ج مادوكس "مبادئ التحليل الرياضي" ترجمة وليد ديب، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني ١٩٨٤ م.

(٢) ايرل و . سوكوفسكي "حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية" جزءان ، ترجمة أحمد سعيدان ورفاقه، ١٩٨١ م.

(٣) سعد حسنين محمد ورفاقه، "المدخل في الرياضيات الحديثة" ، جزءان، دار المعارف بمصر ، ١٩٧١ م.

(٤) سليمان أبو صبحا "الرياضيات للعلوم الاقتصادية والادارية" مكتبة بغداد –عمان ، ١٩٩٤ م.

(٥) شارلزسولومون، "الرياضيات" ترجمة علي بن الأشهر، معهد الاتحاد العربي، بيروت – ١٩٨١ م.

(٦) عادل سودان ورفاقه "الرياضيات المعاصرة" جزءان، مؤسسة الرسالة، بيروت، ١٩٧١ م.

(٧) عايش زيتون "أساسيات الاحصاء الوصفي" ، دار عمار للنشر والتوزيع، عمان، ١٩٨٤ م.

(٨) عبدالرحيم القواسمة وزميله، "دليل الاختبارات في الرياضيات المعاصرة" جزءان، دار الفرقان للنشر والتوزيع – عمان ، ١٩٨٢ م.

(٩) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الاحصاء"، دار النهضة العربية للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١٠) عبدالعزيز هيكل ورفيقه "الرياضيات" ، دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٨٠ م.

(١١) عبدالعزيز هيكل "الرياضة المالية" دار النهضة للطباعة والنشر، بيروت، ١٩٧٨ م.

(١٢) علي عبدالله الدفاع "نوابغ علماء العرب في الرياضيات" دار الاعتصام.

(١٣) فيجودسكي، "المرجع في الرياضيات العالية" ترجمة أنطون منصور، دار جبر للطباعة والنشر، روسيا – موسكو، ١٩٧٥ م.

(١٤) كما يعقوب "الرياضيات الحديثة" جزءان، دار المعارف بمصر، ١٩٧٣م.

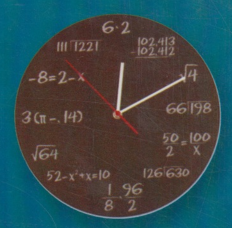
(١٥) محمد عادل سودان، "الرياضيات العامة" ، ثلاثة أجزاء، دار العلوم للطباعة والنشر.

(١٦) محمد عاطف خير الدين ورفاقه، "المثالي في الرياضيات المعاصرة" عدة أجزاء.

(١٧) نيل ديفدسون ورفيقه "الجبر المجرد" ترجمة ديب حسين، منشورات مجمع اللغة العربية الأردني، ١٩٨٢ م.

(١٨) نخبة من المؤلفين "الرياضيات المدرسية وفق منهاج التربية والتعليم الأردنية"، ٢٠٠٧ م.

(١٩) وليم جويس ورفيقه "مبادئ المعادلات التفاضلية"، ترجمة أحمد علاونه ورفيقه، مركز الكتب الأردني، ١٩٩٠ م.



الرياضيات الشاملة

المصفوفات - الاقترانات الجبرية
هندسة التحويلات - المتباينات والبرمجة الخطية



للنشر والتوزيع

الأردن - عمان

هاتف: 00962 6 5658253 / 00962 6 5658252

فاكس: 00962 6 5658254 ص.ب: 141781

البريد الإلكتروني: darosama@orange.jo

الموقع الإلكتروني: www.darosama.net